

VIBRAÇÕES EM PONTES FERROVIÁRIAS DE ALTA VELOCIDADE MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSONÂNCIA



Conceição António Costa

**Mestrado em Engenharia Civil
Área de Especialização: Estruturas
Dissertação**

ORIENTADORES: Doutor Rui Alexandre Silva Bebiano
Doutora Cristina Cruz Ferreira Oliveira

Dezembro de 2015

Dissertação submetida no Instituto Politécnico de Setúbal

VIBRAÇÕES EM PONTES FERROVIARIAS DE ALTA VELOCIDADE – MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSONÂNCIA

Mestrado em Engenharia Civil

DECLARAÇÃO DE AUTORIA DO TRABALHO

Declaro ser o autor deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Conceição António Costa

(assinatura)

DIREITOS DE COPIA OU COPYRIGHT

© **Copyright:** Conceição António Costa

O Instituto Politécnico de Setúbal tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Foronta caba
Bô pudi tocam palmo

Que a PAIXÃO nos transforme e nos faça prosseguir sempre com vontade e ambição

just crioula

AGRADECIMENTOS

Finalmente escrevo esta parte, significa que consegui concluir este trabalho, mas não o fiz sozinha, contei com a preciosa ajuda de algumas pessoas, que permitiram que esta etapa da minha vida se concretizasse.

Deste modo agradeço a conclusão desta dissertação:

Ao Professor Doutor Rui Bebianco, o orientador, pela (enorme) paciência, disponibilidade e principalmente pelos conhecimentos transmitidos sem os quais a realização e conclusão desta dissertação estaria seriamente comprometida.

À Professora Doutora Cristina Oliveira, co-orientadora, entre outras coisas pela disponibilidade para agilizar o processo de submissão da tese, perante prazos apertados.

Ao Francisco Frade, com quem tenho muito a aprender e a conhecer, que da vida profissional tornou-se um amigo incondicional.

À minha Amiga Nara, com quem compreendi que “alma gémea” não se aplica só a casais (porque tu és a minha) e com quem descobri que se pode confiar sem porquês.

À minha grande família (que faz questão que conste o nome de cada um): Mariama (mãe); António (pai); Leonor e Miriam (sobrinhas), Felizberto, Maida, Renato e Alzina (irmãos), porque de alguma forma todos contribuíram para o resultado de quem sou hoje. Muito obrigada por me terem gerado (pais); por me terem aturado e principalmente por me terem compreendido. Eu serei para sempre a vossa Mimi.

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo avaliar o comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária inserida numa linha de alta velocidade europeia.

Ao estudar o comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária de alta velocidade existe um fenómeno que merece particular atenção, o fenómeno de ressonância. No caso de pontes ferroviárias, a passagem de um comboio (i.e., uma sequência de cargas móveis “regularmente espaçadas”) em alta velocidade constitui uma ação periódica cuja frequência se poderá aproximar-se da frequência natural de vibração da estrutura – ou seja, poderá ocorrer um fenómeno de ressonância, com as consequentes amplificações de esforços e deformações estruturais.

A dissertação aborda, com especial atenção, as condições de resposta vertical da estrutura, nomeadamente o deslocamento e a aceleração máximos, em situação de ressonância com o carregamento – a passagem de veículos em alta velocidade.

Para o desenvolvimento do estudo, aplica-se o Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER) para analisar o comportamento dinâmico face à passagem (i) de alguns dos comboios de alta velocidade que atualmente circulam em linhas europeias (TGV, Talgo, Eurostar, etc.) e (ii) dos 10 comboios universais que compõem o modelo HSLM-A, preconizado na Parte 2 do Eurocódigo 1.

O viaduto de El Genil, a estrutura sobre a qual este estudo se desenvolve, localiza-se em Espanha (na linha Córdoba-Málaga) e apresenta um tabuleiro de betão pré-esforçado, simplesmente apoiado e com secção em caixão monocelular.

Com a análise dinâmica, determinam-se estimativas dos valores máximos da resposta, em termos de deslocamentos e aceleração vertical, comparando-se os resultados obtidos com os reportados por Bebianno (2010), embora estes tenham sido obtidos com recurso a uma técnica mais sofisticada, a Teoria Generalizada de Vigas (GBT).

Finalmente, faz-se um pequeno estudo paramétrico, onde se analisam os efeitos, na resposta dinâmica, (i) do espaçamento dos eixos do comboio (para um comboio fictício com os eixos igualmente espaçados) e (ii) do amortecimento estrutural.

PALAVRAS-CHAVE: Ponte Ferroviária de Alta Velocidade, Cargas Móveis, Análise Dinâmica, Método DER, Ressonância.

ABSTRACT

The goal of this thesis is to assess the dynamic behaviour of a railway bridge on a European high-speed railway line.

When studying the dynamic behaviour of a high-speed railway bridge, resonance is a phenomenon requiring particular attention. A train crossing a bridge span (i.e., a sequence of “equally spaced” moving loads) at high speeds constitutes a periodic action which frequency could be close to the structure natural vibration frequency – which means, resonance could occur, along with the consequent amplification in internal forces and deformations.

This thesis analyses the vertical response of the structure, namely in terms of maximum displacements and accelerations, when resonance occurs due to the passage of trains at high-speeds.

The study employs the Method of Decomposition of Excitation in Resonance (DER) to analyse the dynamic response to the passage of (i) some real high-speed trains currently in service on European networks (TGV, Talgo, Eurostar, etc.) and (ii) the 10 universal trains comprising the HSML-A model, prescribed by Eurocode 1, Part 2.

The El Genil viaduct, the structure of which this thesis is concerned, is located at the Spanish Córdoba-Málaga line and involves a simply supported concrete single-cell box girder.

One determines the maximum response, in terms of vertical displacement and acceleration, and compares the results obtained with those reported by Bebianno (2010), although these have been obtained with a more sophisticated technique, the Generalized Beam Theory (GBT).

Finally, a small parametric study is presented, concerning the dynamic effects of (i) the axle spacing (for a fictitious train with uniformly spaced axes) and (ii) the structural damping ratio.

KEYWORDS: High-Speed Railway Bridges, Moving Loads, Dynamic Analysis, DER Method, Resonance.

ÍNDICE

RESUMO.....	iii
ABSTRACT	v
1.....INTRODUÇÃO	1
1.1. A FERROVIA DE ALTA VELOCIDADE	1
1.2. OBJETIVOS	3
1.3. ORGANIZAÇÃO E CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO	3
2.COMPORTAMENTO DINÂMICO DE BARRAS SIMPLEMENTE APOIADAS	5
2.1. GENERALIDADES.....	5
2.2. VIBRAÇÃO TRANSVERSAL EM VIGAS	6
2.2.1. EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO	6
2.2.2. VIBRAÇÃO LIVRE: FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS	9
2.2.2.1. CASO PARTICULAR: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	11
2.3. ANÁLISE DINÂMICA: RESPOSTA A CARREGAMENTO HARMÓNICO.....	13
2.4. ANÁLISE DINÂMICA: RESPOSTA À PASSAGEM DE CARGA MÓVEL	16
2.4.1. MÉTODO ANALÍTICO – MODELO DE FRÝBA	16
2.4.2. MÉTODO NUMÉRICO – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	18
3.PONTES FERROVIÁRIAS DE ALTA VELOCIDADE: COMPORTAMENTO DINÂMICO	21
3.1. COMPORTAMENTO DINÂMICO	22

3.1.1.	MASSA.....	23
3.1.2.	RIGIDEZ.....	23
3.1.3.	AMORTECIMENTO	24
3.2.	CARREGAMENTO FERROVIÁRIO: CARACTERÍSTICAS DOS COMBOIOS 25	
3.2.1.	CARREGAMENTO EXERCIDO POR COMBOIOS REAIS	25
3.2.2.	O MODELO DE COMBOIOS UNIVERSAIS HSLM	27
3.3.	RESSONÂNCIA E SUPRESSÃO	28
3.4.	FATORES QUE DETERMINAM A NECESSIDADE DE REALIZAÇÃO DE UMA ANÁLISE DINÂMICA	30
3.4.1.	FATOR DINÂMICO Φ	32
4.	MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSONÂNCIA (DER)	35
4.1.	GENERALIDADES	35
4.2.	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	36
5.	ANÁLISE DINÂMICA DO VIADUTO DE EL GENIL	45
5.1.	CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA.....	45
5.2.	ANÁLISE DE VIBRAÇÃO.....	46
5.3.	ANÁLISE DINÂMICA	47
5.3.1.	RESPOSTA A COMBOIOS UNIVERSAIS DO MODELO HSLM-A	47
5.3.2.	RESPOSTA A COMBOIOS REAIS	50
5.4.	INVESTIGAÇÃO COMPLEMENTAR	53
5.4.1.	INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO DE EIXOS	53
5.4.2.	INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO	57

6.CONCLUSÕES	E	DESENVOLVIMENTOS	FUTUROS
			61
6.1.	CONCLUSÕES	61	
6.2.	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	62	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS			63
ANEXO			

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Previsão da rede de alta velocidade mundial para 2025	2
Figura 1.2 – Previsão da rede de alta velocidade Europeia para 2025	2
Figura 2.1 - Desenvolvimento da vibração em regime amortecido e não amortecido	6
Figura 2.2 – Viga contínua com carregamento variável ao longo do tempo.....	7
Figura 2.3 – Troço da viga de comprimento infinitesimal dx	7
Figura 2.4 – Gráficos das funções $\omega_n(L)$ para $n = 1,2,3$	13
Figura 2.5 – Formas dos modos de vibração (ω_n) para $n = 1,2,3$	13
Figura 3.1 – Amortecimento em função do vão [ERRI D214, 2001].....	24
Figura 3.2 – Representação gráfica do amortecimento adicional $\Delta\xi$ em função do comprimento do vão L	25
Figura 3.3 – Comboios da rede europeia de alta velocidade: (a) imagem e (b) modelo de carga (dimensões em $[m]$) [Bebiano, 2010]	26
Figura 3.4 – Grupos de comboios reais: a) Convencional; b) Articulado; c) Regular....	27
Figura 3.5 – Modelo de carga HSLM-A (parâmetros em $[m]$)	27
Figura 3.6 – Representação do efeito de ressonância numa ponte simplesmente apoiada.....	29
Figura 3.7 – Representação do efeito de supressão numa ponte simplesmente apoiada	29
Figura 3.8 – Fluxograma para a determinação da necessidade de realização de uma análise dinâmica	30
Figura 3.9.- Limites da frequência natural da ponte n_0 (Hz) em função do vão L (m) ..	31

Figura 4.1 – Equivalência entre o sistema real e um sistema ideal de 1 grau de liberdade	36
Figura 4.2 – Ilustração do conceito de sub-comboio [Ribeiro, 2004]	43
Figura 5.1 – Representação do perfil longitudinal do viaduto del Genil	45
Figura 5.2 – Representação do perfil transversal do viaduto de El Genil	46

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 – Coeficiente de amortecimento a considerar no dimensionamento de pontes, [EN1991-2, 2003]	24
Tabela 3.2 – Características dos 10 comboios universais (A1 a A10), para o modelo de carga HSLM.....	28
Tabela 5.1 – Características geométricas e mecânicas da secção transversal do viaduto del Genil	46
Tabela 5.2 – As 5 primeiras frequências naturais do viaduto del Genil.....	47
Tabela 5.3 – HSLM – A7 d_{max} e a_{max} (comparação com GBT [Bebiano, 2010])	50
Tabela 5.4 – Comparação entre as respostas dinâmicas obtidas para os comboios HSLM-A7 e Virgin.....	52

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 5.1 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios universais do modelo HSLM: d_{\max} vs V	48
Gráfico 5.2 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios universais do modelo HSLM: a_{\max} vs V	48
Gráfico 5.3 – Resposta do tabuleiro à passagem do comboio HSLM-A7: d_{\max} vs V	49
Gráfico 5.4 – Resposta do tabuleiro à passagem do comboio HSLM-A7: a_{\max} vs V	49
Gráfico 5.5 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios reais: d_{\max} vs V	51
Gráfico 5.6 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios reais: a_{\max} vs V	51
Gráfico 5.7 – Comparação entre as respostas para os comboios HSLM-A7 e Virgin: d_{\max}	52
Gráfico 5.8 – Comparação entre as respostas para os comboios HSLM-A7 e Virgin: a_{\max}	53
Gráfico 5.9 – Resposta dinâmica à passagem do comboio de eixos igualmente espaçados: d_{\max}	54
Gráfico 5.10 – Resposta dinâmica à passagem do comboio de eixos igualmente espaçados: a_{\max}	55
Gráfico 5.11 – Resposta dinâmica à passagem do comboio regular com $D = 22\text{ m}, 23\text{ m}$ e 26 m : d_{\max}	56
Gráfico 5.12 – Resposta dinâmica à passagem do comboio regular com $D = 22\text{ m}, 23\text{ m}$ e 26 m : a_{\max}	56
Gráfico 5.13 – Influência do fator de amortecimento (ξ) na resposta ao comboio HSLM-A7: d_{\max}	57
Gráfico 5.14 – Influência do fator de amortecimento (ξ) na resposta ao comboio HSLM-A7: a_{\max}	58

Gráfico 5.15 – Resposta ao comboio HSLM-A7 para amortecimento nulo ($\xi \approx 0$): d_{\max} .	
.....	58

Gráfico 5.16 – Resposta ao comboio HSLM-A7 para amortecimento nulo ($\xi \approx 0$): a_{\max} .	
.....	59

1. INTRODUÇÃO

1.1. A FERROVIA DE ALTA VELOCIDADE

O Homem necessita de se deslocar. Para se alcançar o desenvolvimento de uma moderna sociedade humana, é vital a existência de um sistema de transportes eficaz, que permita a deslocação de pessoas e mercadorias entre regiões. Neste contexto, a ferrovia de alta velocidade tem vindo a assumir-se como um modo de transporte rápido, limpo e com elevada eficiência energética, capaz de competir com os meios de transporte aéreo ou rodoviário. Atualmente vários países do mundo estão a planear, a construir ou a ampliar as suas próprias redes [De Angoití, 1998] – ver Figura 1.1 e 1.2.

Do ponto de vista da Engenharia Civil, mais propriamente na vertente do projecto estrutural, a concepção de uma linha para alta velocidade ferroviária envolve certas complexidades específicas, nomeadamente a necessidade de estimar/mitigar as vibrações transmitidas pelos veículos à infraestrutura (i.e., a via) e ao meio físico adjacente (solo, edifícios junto à linha, etc.). No caso de pontes, em particular, tais vibrações poderão assumir amplitudes consideráveis, na medida em que a passagem de um comboio (i.e., uma sequência de cargas móveis “igualmente espaçadas”) em alta velocidade constitui uma ação periódica cuja frequência se poderá aproximar da frequência natural de vibração da estrutura – ou seja, pode ocorrer um fenómeno de ressonância [Frýba, 1999].

Este fenómeno estrutural, descoberto há relativamente pouco tempo (mais propriamente nos anos 90) tem sido objeto de uma intensa atividade de investigação, tendo sido desenvolvidos alguns métodos simplificados para estimar a resposta dinâmica de pontes – p.e., o Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (“DER”) e o Método da Linha de Influência Residual (“LIR”). Ambos os métodos, bem como a maior parte dos modelos estruturais geralmente utilizados, assumem que a resposta dinâmica do tabuleiro se resume ao modo de flexão, excluindo assim o modo de torção ou, no caso de tabuleiros de parede fina, vibrações do tipo local/distorcional [Bebiano, 2010].



Figura 1.1 – Previsão da rede de alta velocidade mundial para 2025
(Fonte: UIC www.uic.org)



Figura 1.2 – Previsão da rede de alta velocidade Europeia para 2025
(Fonte: UIC www.uic.org)

1.2. OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste em abordar o tema do comportamento dinâmico de pontes ferroviárias de alta velocidade. Em particular, aborda-se as condições de resposta vertical da estrutura em situação de ressonância com o carregamento – a passagem de veículos em alta velocidade.

Após se expor a teoria subjacente, aplica-se o Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER) para analisar o comportamento dinâmico de um tabuleiro real, parte do viaduto de El Genil, em Espanha. Trata-se de um tabuleiro de betão pré-esforçado, simplesmente apoiado e com secção em caixão. Procura-se reproduzir os resultados reportados por Bebiano (2010), embora estes tenham sido obtidos com recurso a uma técnica mais sofisticada, a Teoria Generalizada de Vigas (GBT). No final, faz-se um estudo paramétrico em que se analisa o impacto de alguns parâmetros na resposta estrutural.

1.3. ORGANIZAÇÃO E CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação desenvolve-se em seis capítulos, sendo que cada um deles é sumariamente apresentado nos parágrafos que se seguem.

No capítulo 1, encontram-se os objetivos da dissertação e apresenta-se sucintamente as problemáticas inerentes à projeção de uma ponte ferroviária alta velocidade, por último, apresenta-se a organização da dissertação bem como a descrição dos capítulos que a compõem.

No capítulo 2, descrevem-se os aspetos gerais associados à análise dinâmica de uma viga simplesmente apoiada, passando da origem da vibração à dedução da equação de equilíbrio dinâmico. Neste capítulo apresenta-se também a influência do carregamento harmónico e do carregamento exercido por um conjunto de cargas móveis, através dos modelos do (i) analítico – Frýba, e do (ii) modelo numérico – elementos finitos.

No capítulo 3, apresentam-se os aspetos regulamentares referentes ao dimensionamento de pontes ferroviárias preconizados no Eurocódigo para Construção 1: Ações em Estruturas – Parte 2: Cargas de Tráfego em Pontes.

No capítulo 4, é apresentada a metodologia simplificada de análise dinâmica através da qual o estudo será desenvolvido – Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER). Neste capítulo são expostos os condicionalismos intrínsecos à utilização do método, bem como a formulação matemática que permite a sua aplicação.

No capítulo 5, apresentam-se as características inerentes ao viaduto El Genil (secção longitudinal, secção transversal e características geométricas) e são analisados comparativamente os resultados reportados em Bebiano (2010), com os resultados obtidos com a análise de vibração (Equação 2.36) e com a análise dinâmica (DER). Apresenta-se ainda neste capítulo, um estudo complementar, a nível do comportamento dinâmico face a (i) diferentes espaçamentos regulares, entre os eixos dos comboios, bem como, (ii) face à influência da aplicação de diferentes valores de amortecimento e (iii) o resultado da consideração de amortecimento nulo.

No capítulo 6, apresentam-se as ilações globais do desenvolvimento do estudo e propõem-se trabalhos que futuramente poderão ser desenvolvidos.

2. COMPORTAMENTO DINÂMICO DE BARRAS SIMPLEMENTE APOIADAS

2.1. GENERALIDADES

Define-se vibração como o movimento, de uma partícula ou de um corpo/sistema, que se repete em torno de uma posição de equilíbrio estável, de forma regular ou irregular, num determinado espaço de tempo. As vibrações podem igualmente ser livres ou forçadas – no primeiro caso ocorrem naturalmente, sem intervenção de forças dinâmicas exteriores (vibrações naturais), no segundo caso surgem em resposta a forças excitadoras.

O tempo necessário para que o sistema complete um ciclo do movimento oscilatório denomina-se por *período* de vibração (T). Ao número de ciclos realizados pelo sistema por unidade de tempo chama-se *frequência* (f) – ou então, caso se considere o número de radianos percorrido pelo vetor fase por unidade de tempo, tem-se a *frequência angular* (ω), e ambas relacionam-se por $\omega = 2\pi f$. Quanto ao deslocamento máximo, medido da posição de equilíbrio caracteriza a *amplitude* de vibração (A).

Conforme mencionado acima, ao contrário da vibração livre, que corresponde ao movimento do sistema mantido apenas pela inércia e pelas forças de restituição, a vibração forçada ocorre quando o sistema sofre a ação dinâmica de forças exteriores durante o tempo em que movimento vibratório existe.

As forças exteriores podem ser denominadas como *determinísticas* ou *aleatórias*. Das várias formas que as forças determinísticas se apresentam, destacam-se as periódicas (que poderão ser harmónicas ou não - Capítulo 2.3), uma vez que representam a maioria dos fenómenos responsáveis pelas vibrações dos sistemas físicos. A vibração determinística permite prever todas as características do movimento vibratório em qualquer instante do tempo. No que diz respeito à vibração aleatória, provocada por cargas com variação aleatória, a resposta não pode ser quantificada de forma determinística – no entanto, a incerteza da resposta pode ser abordada de forma racional, usando modelos probabilísticos baseados nos conceitos de variável aleatória e processo aleatório.

A vibração de um sistema é também influenciada pelo amortecimento do sistema, conforme se ilustra na Figura 2.1. De facto, num sistema amortecido – como são todos os sistemas reais – ocorre alguma dissipação da energia vibratória no decorrer do tempo, proporcionando uma diminuição progressiva da amplitude da vibração. Em sistemas ideais não amortecidos a energia vibratória não se dissipa, permanecendo o movimento vibratório estacionário ao longo do tempo (mantendo-se constante a amplitude).

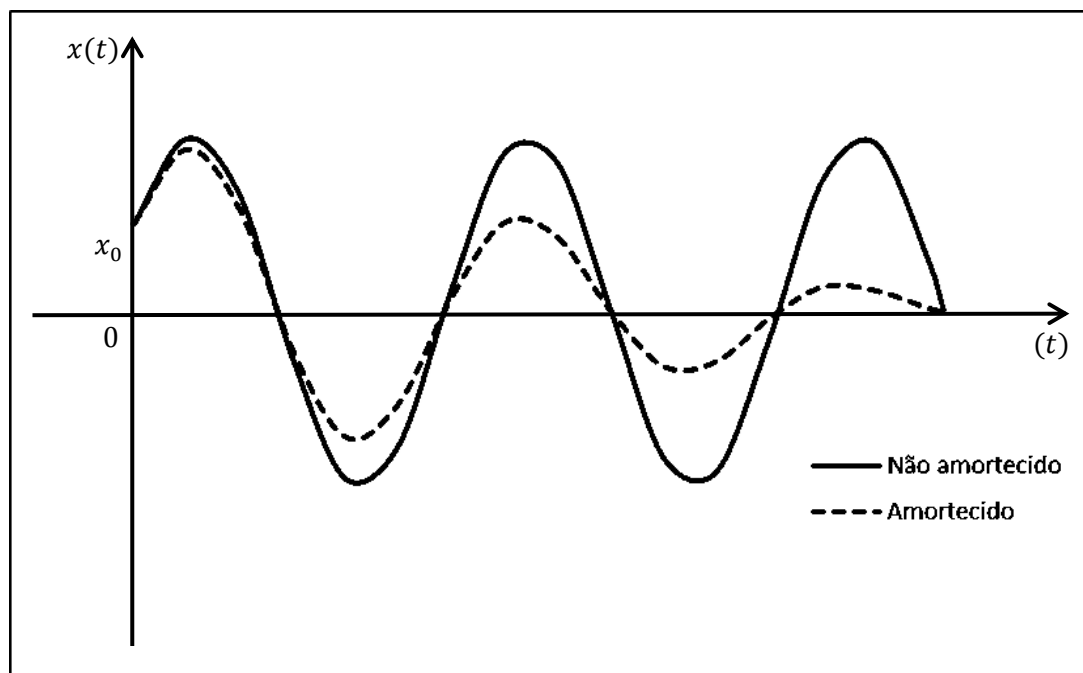


Figura 2.1 - Desenvolvimento da vibração em regime amortecido e não amortecido

2.2. VIBRAÇÃO TRANSVERSAL EM VIGAS

2.2.1. EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

Admita-se uma viga contínua, como a ilustrada na Figura 2.2, com comprimento L e com massa por unidade de comprimento, momento de inércia da secção e módulo de elasticidade do material representados por $m(x)$, $I(x)$ e E , respectivamente, e com condições de apoio genéricas, incluindo uma fundação visco-elástica cujo coeficiente de amortecimento e a rigidez são, respetivamente, $c(x)$ e $k(x)$, sobre a qual atua um carregamento genérico $p(x, t)$, variável ao longo do tempo e do espaço. A obtenção da equação de equilíbrio dinâmico ou seja, as equações que permitem determinar $u(x, t)$ torna-se possível ao considerar-se um troço de comprimento infinitesimal dx , da viga, conforme ilustra a Figura 2.3. Tratando-se de uma porção com comprimento infinitesimal é permitido admitir-se que o carregamento e as reações da fundação visco-elástica se encontram uniformemente distribuídos.

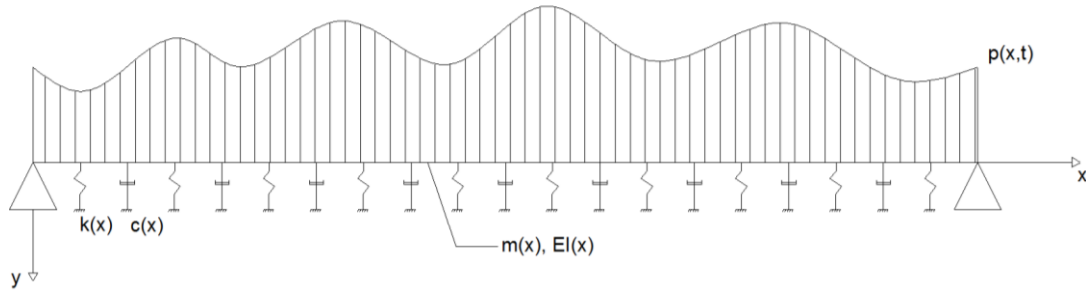


Figura 2.2 – Viga contínua com carregamento variável ao longo do tempo

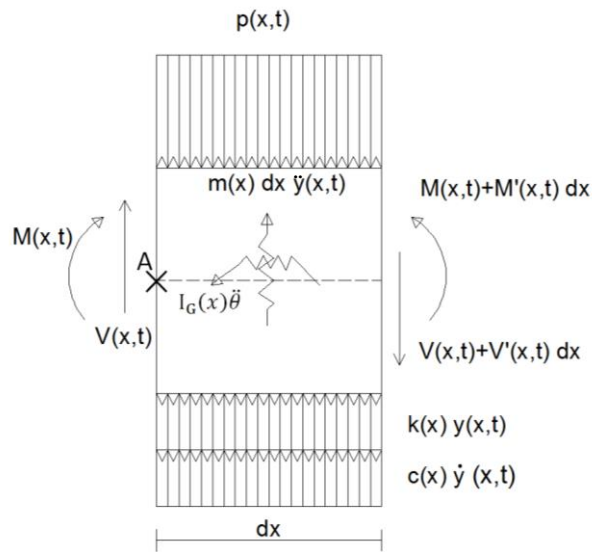


Figura 2.3 – Troço da viga de comprimento infinitesimal dx

Para o equilíbrio de forças segundo a direção vertical (considerando positivo o sentido “para cima”), num determinado instante de tempo (t), obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned}
 \sum F_v &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow V(x,t) - \left(V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx - \\
 &\quad - p(x,t) dx + c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + k(x) u(x,t) dx = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + p(x,t) &= m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k(x) u(x,t).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

De igual modo, faz-se o equilíbrio de momentos em torno do ponto A (Figura 2.3), sendo que a parcela correspondente à inércia de rotação é desprezada à priori (i.e., $I_G(x)\ddot{\theta} \approx 0$), uma vez que apresenta valores na ordem de grandeza de dx^3 . Chega-se à expressão

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -M(x, t) + M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx - \left(V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) dx + \\ + \left[-p(x, t)dx + c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx + k(x)u(x, t)dx + m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx \right] \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tendo em conta que o comprimento da porção da viga é infinitesimal ($dx \ll 1$), os valores com ordem de grandeza dx^2 são considerados nulos, pelo que a expressão se simplifica e obtém-se a conhecida relação entre momento flector e esforço transversal,

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = V(x, t). \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.1), obtém-se

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k(x) u(x, t). \quad (2.4)$$

Tendo em conta a relação momento/curvatura da teoria clássica de vigas

$$M(x, t) = -EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.5)$$

e introduzindo-a em (2.4) obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + p(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k(x) u(x, t), \quad (2.6)$$

Para um troço uniforme, i.e., com características mecânicas uniformes – rigidez de flexão ($EI(x) \equiv EI$), massa ($m(x) \equiv m$), amortecimento ($c(x) \equiv c$) e rigidez da fundação elástica ($k(x) \equiv k$) – a equação (2.6) pode ser simplificada para

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k u(x, t) = p(x, t). \quad (2.7)$$

A equação diferencial parcial (2.7) representa o comportamento dinâmico de uma viga geral no modo de deformação por flexão.

2.2.2. VIBRAÇÃO LIVRE: FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS

Para obter as frequências e os modos naturais de vibração da viga é necessário considerar nulos o coeficiente de amortecimento ($c = 0$) e o carregamento ($p(x, t) = 0$), ou seja

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + k u(x, t) = 0. \quad (2.8)$$

A solução da função $u(x, t)$, que depende simultaneamente das variáveis x e t é alcançada com a separação da função em duas funções que se multiplicam¹, onde (i) uma ($\bar{u}(x)$) representa a deformada, constante ao longo do tempo, e (ii) a outra ($f(t)$) representa a variação da amplitude da anterior no tempo. Ou seja,

$$u(x, t) = \bar{u}(x)f(t) \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.8), obtém-se

$$EI \frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} f(t) + m \bar{u}(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + k \bar{u}(x) f(t) = 0, \quad (2.10)$$

A qual pode ser reorganizada na seguinte forma:

$$\frac{\left[EI \frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} + k \bar{u}(x) \right]}{m \bar{u}(x)} = - \frac{\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right]}{f(t)}. \quad (2.11)$$

¹ Fisicamente, esta substituição corresponde a considerar-se o movimento como *síncrono*.

Como os dois lados da igualdade anterior só dependem das variáveis x e t , respetivamente, então é forçoso que ambos sejam iguais a uma constante. Designando, por conveniência, essa constante por ω^2 , tem-se então

$$\frac{\left[EI \frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} + k \bar{u}(x) \right]}{m \bar{u}(x)} = \omega^2, \quad (2.12)$$

$$-\frac{\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right]}{f(t)} = \omega^2, \quad (2.13)$$

que são duas equações independentes, as quais se podem reorganizar do seguinte modo:

$$EI \frac{d^4 \bar{u}(x)}{dx^4} - [\omega^2 m - k] \bar{u}(x) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0. \quad (2.15)$$

Assim, transformou-se a equação diferencial parcial (2.8), em ordem a x e t , em duas equações diferenciais ordinárias, uma em ordem a x (2.14) e a outra em ordem a t (2.15) – elas traduzem o equilíbrio dinâmico da barra (sem amortecimento e livre de cargas) nas dimensões do tempo e da direcção transversal, respetivamente.

A equação (2.15) tem como solução geral

$$f(t) = G \sin(\omega t) + H \cos(\omega t) \quad (2.16)$$

ou então, assumindo que $f(0) = 0$,

$$f(t) = G \sin(\omega t) \quad (2.17)$$

equação que traduz o movimento harmónico simples (MHS), cuja frequência angular é, precisamente, ω e o período e frequência cíclica se obtém de

$$\sin(\omega T) = 0 \Leftrightarrow \omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.18)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.19)$$

Quanto à equação (2.14), sabe-se da Análise Matemática que a solução geral é

$$\bar{u}(x) = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x) + C\cos(\alpha x) + D\sin(\alpha x), \quad (2.20)$$

onde

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m - k}{EI}}. \quad (2.21)$$

As constantes A , B , C , e D , que definem a forma do modo de vibração, dependem das condições de fronteira de cada barra. Deste modo, as frequências e os modos de vibração naturais são obtidos com a determinação das constantes, mediante as condições de fronteira que a barra apresenta.

2.2.2.1. CASO PARTICULAR: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Considerando a vibração livre de uma viga simplesmente apoiada, de comprimento L e sem fundação elástica ($k = 0$), prosseguir-se-á à determinação das frequências e dos modos de vibração naturais. Por se tratar de vibração livre as condições de fronteira não dependem da variável tempo, ou seja, são consideradas somente as condições de apoio e não as condições iniciais.

Para a viga simplesmente apoiada, os deslocamentos e o momento fletor nas extremidades são nulos, o que se traduz nas seguintes condições de fronteira

$$\bar{u}(0) = 0, \quad (2.22)$$

$$\bar{u}(L) = 0, \quad (2.23)$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow \bar{u}''(0) = 0, \quad (2.24)$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow \bar{u}''(L) = 0. \quad (2.25)$$

substituindo as condições de fronteira em (2.15) e (2.18), obtém-se

$$\bar{u}(0) = A\cosh(0) + B\sinh(0) + C\cos(0) + D\sin(0) = 0 \Leftrightarrow A + C = 0, \quad (2.26)$$

$$\bar{u}(L) = A\cosh(\alpha L) + B\sinh(\alpha L) + C\cos(\alpha L) + D\sin(\alpha L) = 0, \quad (2.27)$$

$$\bar{u}''(0) = \alpha^2(A\cosh(0) + B\sinh(0) - C\cos(0) - D\sin(0)) = 0 \Leftrightarrow A - C = 0, \quad (2.28)$$

$$\bar{u}''(L) = \alpha^2(A\cosh(\alpha L) + B\sinh(\alpha L) - C\cos(\alpha L) - D\sin(\alpha L)) = 0. \quad (2.29)$$

Através de (2.26) e (2.28) é possível deduzir que $A = C = 0$, sendo possível escrever (2.27) e (2.29) da seguinte forma

$$B\sinh(\alpha L) + D\sin(\alpha L) = 0, \quad (2.30)$$

$$B\sinh(\alpha L) - D\sin(\alpha L) = 0, \quad (2.31)$$

com a soma de ambas as equações obtém-se

$$2B\sinh(\alpha L) = 0 \Rightarrow B = 0. \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.30) ou (2.31) temos

$$D\sin(\alpha L) = 0 \Rightarrow D = 0 \vee \sin(\alpha L) = 0. \quad (2.33)$$

eliminando a solução trivial $D = 0$ (a qual conduziria à barra indeformada, com $\bar{u}(x) = 0$) conclui-se que

$$\sin(\alpha L) = 0. \quad (2.34)$$

Para esta equação ser satisfeita é necessário que o argumento do seno seja um múltiplo de π , pelo que é necessário ter-se ($n = 1, 2, \dots$)

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad (2.35)$$

logo, usando (2.21) chega-se à equação que fornece as frequências naturais da viga simplesmente apoiada

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.36)$$

onde n representa a ordem do modo de vibração – na Fig. 2.4 representam-se as curvas $\omega_n(L)$ para os 3 primeiros modos ($n = 1, 2, 3$). Assim, usando (2.17) e (2.34)-(2.36), a função $u_n(x, t)$ que traduz a configuração de equilíbrio dinâmico do modo n é dada por

$$u_n(x, t) = \bar{u}_n(x)f_n(t) = G\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sin(\omega_n t), \quad (2.37)$$

sendo representados na Fig. 2.5 os gráficos de $\bar{u}_n(x)$ para os 3 primeiros modos.

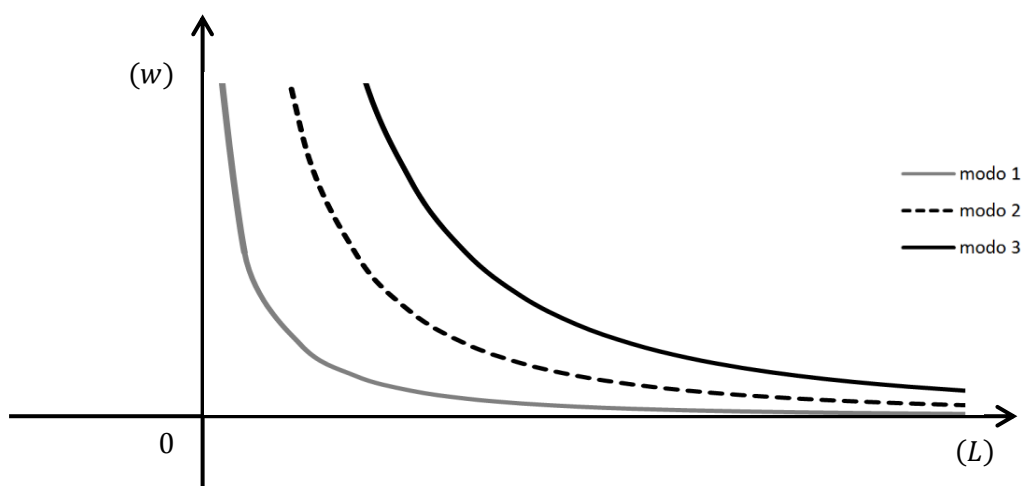


Figura 2.4 – Gráficos das funções $\omega_n(L)$ para $n = 1, 2, 3$

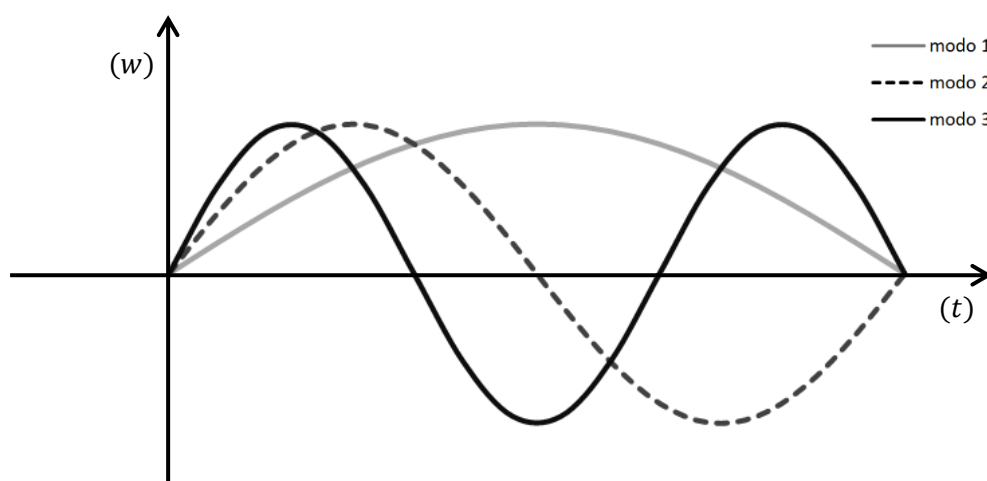


Figura 2.5 – Formas dos modos de vibração (ω_n) para $n = 1, 2, 3$

2.3. ANÁLISE DINÂMICA: RESPOSTA A CARREGAMENTO HARMÓNICO

O carregamento harmónico é a forma mais simples do carregamento periódico. Embora não represente a excitação provocada por cargas móveis, o seu estudo permite compreender alguns conceitos fundamentais sobre a resposta dinâmica de um sistema, em particular o de ressonância. Assim, nesta secção faz-se um resumo deste tema.

Seja uma barra genérica, com amortecimento ($c \neq 0$) mas sem fundação elástica ($k = 0$). Tendo em conta a equação (2.7), tem-se

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t). \quad (2.38)$$

Um carregamento harmónico pode ser expressado por

$$p(x, t) = \bar{p}(x) \sin(\omega_f t), \quad (2.39)$$

onde $\bar{p}(x)$ é a função que define a forma do carregamento e ω_f é a frequência angular da excitação. Aplicando o princípio da sobreposição modal, pode-se expressar a solução como uma sobreposição de contribuições de N modos de vibração, i.e.,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(x) f_j(t), \quad (2.40)$$

onde as funções $\bar{u}_j(x)$ já são conhecidas, pois correspondem às configurações dos modos de vibração, e pretende-se determinar as respetivas funções de evolução temporal $f_j(t)$. Para isso, substitui-se (2.39) e (2.40) em (2.38), multiplicam-se todos os termos por $\bar{u}_i(x)$ e integram-se ambos os lados da equação em x , no domínio $[0, L]$, obtendo-se um sistema de N equações desacopladas do género [Clough e Penzien, 1979]:

$$\ddot{f}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{P_n}{M_n} \sin(\omega_f t), \quad (2.41)$$

onde n é o modo de vibração em questão, ζ_n é o seu fator de amortecimento e

$$M_n = m \int_0^L \bar{u}_n(x)^2 dx, \quad (2.42)$$

$$P_n = \int_0^L \bar{u}_n(x) \bar{p}(x) dx, \quad (2.43)$$

são a massa e a força generalizadas associadas ao modo n . Para cada valor de n , a Equação (2.41) admite uma solução que se divide em duas parcelas: a solução homogénea $f_{h,n}(t)$, e a solução particular, $f_{u,n}(t)$, ,

$$f_n(t) = f_{h,n}(t) + f_{u,n}(t), \quad (2.44)$$

cujas expressões são

$$f_{h,n}(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} (A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)), \quad (2.45)$$

$$f_{u,n}(t) = R_d \text{sen}(\omega_f t - \theta), \quad (2.46)$$

onde A e B são constantes que dependem das condições iniciais do problema e ω_D é a frequência amortecida, dada por

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (2.47)$$

no entanto, em situações em que o sistema é pouco amortecido é possível considerar que $\omega_D \cong \omega$. Quanto a R_d , constitui o *factor de amplificação dinâmica*, que traduz a razão entre o deslocamento dinâmico e o deslocamento estático (i.e., devido à atuação estática de $\bar{p}(x)$), e é dado por

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (2.48)$$

onde $\Omega = \omega_f/\omega$ é a razão entre a frequência do carregamento e a frequência do modo n . Na Fig. 2.6 representa-se graficamente a evolução de R_d com Ω (e em função de ζ). Observa-se que quando as duas frequências são muito próximas ($\Omega \approx 1$) o carregamento entra em ressonância com o modo natural n , e os deslocamentos são máximos – para amortecimento nulo ($\zeta = 0$) a ressonância dá-se quando as frequências coincidem ($\Omega = 1$) e os deslocamentos tendem para infinito.

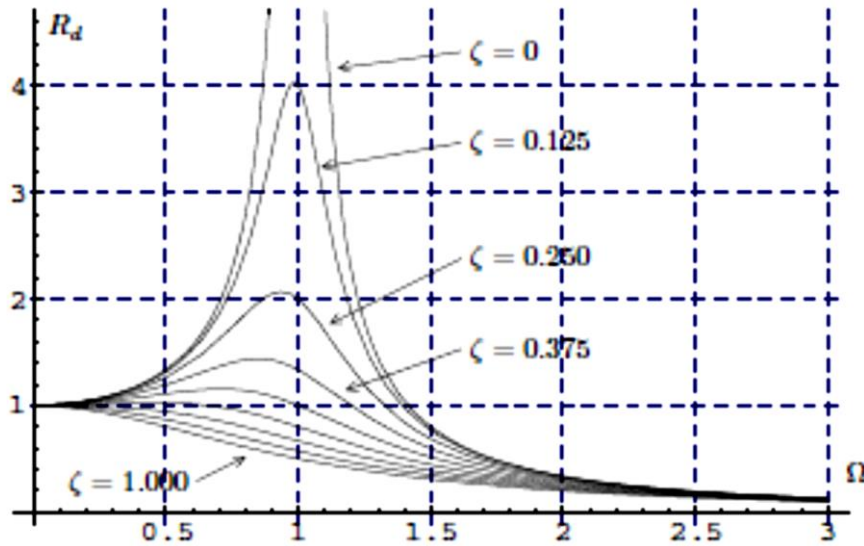


Figura 2.6 – Variação do factor de amplificação dinâmica (R_d) com Ω .

2.4. ANÁLISE DINÂMICA: RESPOSTA À PASSAGEM DE CARGA MÓVEL

A passagem de uma carga móvel, ou de uma sequência de cargas móveis, através de uma barra constitui um carregamento dinâmico diferente do considerado na secção anterior. Aqui, descrevem-se sucintamente dois possíveis métodos para efetuar a análise dinâmica desse sistema: um método analítico (modelo de Frýba (1999)) e um método numérico (Método dos Elementos Finitos).

2.4.1. MÉTODO ANALÍTICO – MODELO DE FRÝBA

Para uma viga simplesmente apoiada com comprimento L , a análise dos efeitos provocados por uma carga móvel é realizada através do modelo desenvolvido por Frýba (1999), onde se considera que o comboio é representado por um sistema de forças P_n , que se deslocam da esquerda para a direita a uma velocidade constante, onde $n = 1, 2, 3 \dots, N$ corresponde ao carregamento em cada eixo N do comboio, Figura. 2.7.

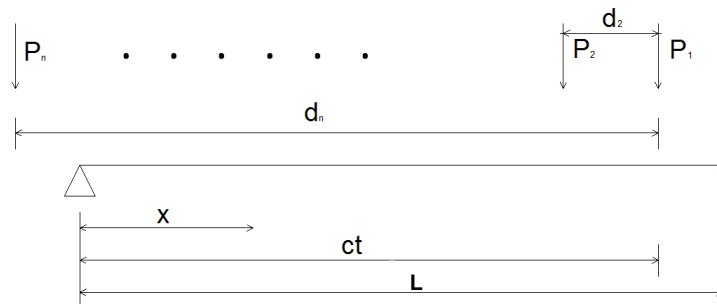


Figura 2.7 – Modelo de cargas móveis para uma viga simplesmente apoiada

Este “carregamento” pode ser descrito matematicamente por

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j(t) \delta(x - x_j) P_j, \quad (2.49)$$

onde N é o número de cargas móveis (i.e., eixos do comboio), $\delta(x)$ representa a função delta de Dirac (que traduz o efeito de uma carga concentrada num ponto), P_j representa o valor da j -ésima carga (i.e., o j -ésimo eixo do comboio) e x_j representa a posição relativa desta última, que é dada por

$$x_j = ct - d_j. \quad (2.50)$$

onde c representa a velocidade (constante) do comboio e d_j representa a distância entre os eixos j e 1 (ver Figura 2.7). Finalmente, a função $\varepsilon_j(t)$ é dada por

$$\varepsilon_j(t) = H(t - t_j) - H(t - T_j), \quad (2.51)$$

onde t_j e T_j são os instantes em que a n -ésima carga entra e sai do tabuleiro, respetivamente, sendo dados por

$$t_j = \frac{d_j}{c}, \quad (2.52)$$

$$T_j = \frac{(L+d_j)}{c}, \quad (2.53)$$

e $H(t)$ é a função de Heaviside (a primitiva de $\delta(x)$), dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (2.54)$$

Assim, as equações (2.49)-(2.54) descrevem matematicamente o carregamento que modela a passagem de um comboio sobre uma ponte. Considerando um tabuleiro uniforme e simplesmente apoiado, (i) introduzindo (2.49) em (2.38), (ii) aplicando o princípio da sobreposição modal e (iii) efetuando a transformada integral de Laplace-Carlson [Frýba, 1999], obtém-se a solução modal

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = f_o \sum_{j=1}^N \frac{1}{n^2[n^2(n^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} & \left[n^2(n^2 - \alpha^2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) - \right. \\ & - \frac{n\alpha[n^2(n^2 - \alpha^2) - 2\beta^2]}{(n^4 - \beta^4)^{\frac{1}{2}}} e^{-\xi_n \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_{D,n}t) - \\ & \left. - 2n\alpha\beta \left(\cos(\omega_n t) - e^{-\xi_n \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_{D,n}t) \right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde f_o representa o máximo deslocamento estático (quando a carga atua no meio-vão da viga), $\alpha = \pi c / (L\omega_1)$ e $\beta = \omega_D / \omega_1$.

2.4.2. MÉTODO NUMÉRICO – BREVE REFERÊNCIA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Segundo Barbero (2001), a utilização de funções de carga corresponde à forma mais simples para se modelar a passagem de uma série de cargas pontuais ao longo do comprimento de uma barra. Para que estas funções sejam definidas corretamente, é necessário considerar os seguintes passos:

- (i) Definir a discretização, i.e., os nós existentes ao longo da trajetória percorrida pela carga;
- (ii) Sendo conhecido o tempo de referência t_0 , que corresponde ao início do movimento, determinar os sucessivos tempos de chegada t_i , de cada carga a cada um dos nós, tal como ilustra a Figura 2.8;
- (iii) Em função da velocidade de circulação da carga v , dos tempos de chegada a cada nó t_i e das distâncias entre nós, definir as funções de carga correspondente a cada nó.

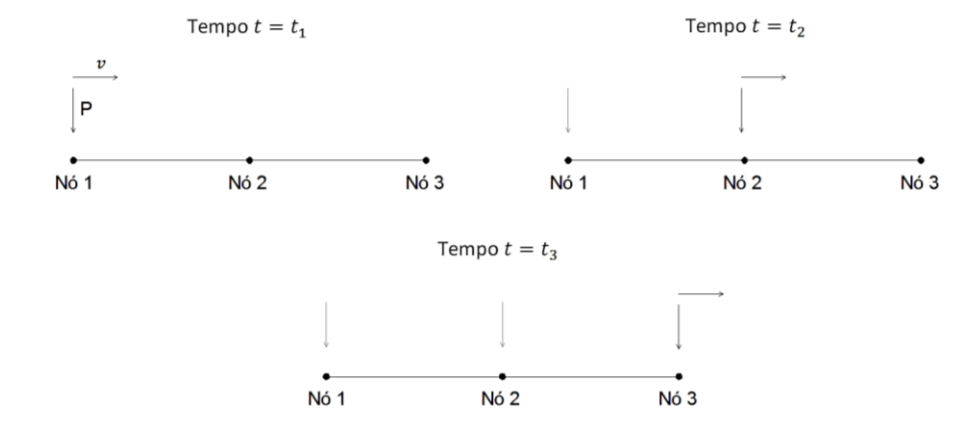


Figura 2.8 – Tempos de chegada da carga móvel a 3 nós consecutivos

O fundamento das funções de carga, consiste em associar a cada nó uma *percentagem* da carga aplicada num determinado instante. Assim, a carga é distribuída de uma forma proporcional entre dois nós, verificando-se num determinado nó o valor máximo quando a carga coincide com o mesmo e correspondendo ao valor nulo quando esta coincide com o nó adjacente – ver Fig. 2.9.

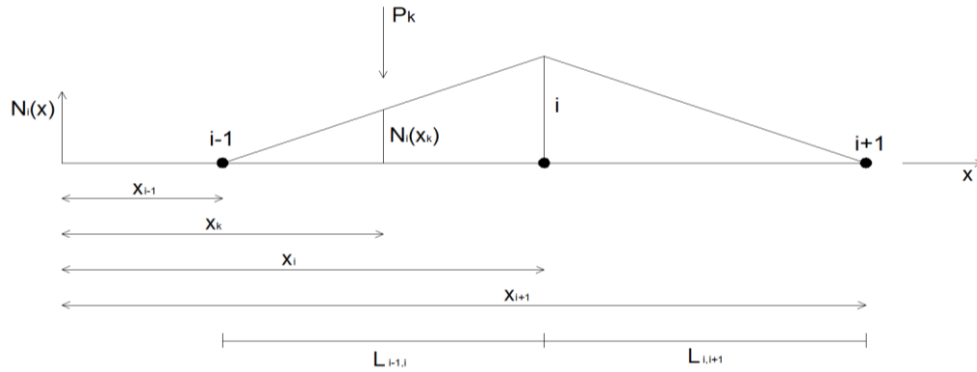


Figura 2.9 – Distribuição da força nodal no nó i , provocada pela passagem da carga móvel P_k .

Para uma viga discretizada em $n + 1$ nós, atravessada por uma carga pontual P a uma velocidade v , como ilustra a Figura 2.10, a função de carga para o nó i corresponde a:

$$P_i = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t \text{ entre } t_{i-1} < t \leq t_i \\ P \frac{x(t) - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & , \text{ para } t \text{ entre } t_{i-1} < t \leq t_i \\ P \frac{x(t) - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & , \text{ para } t \text{ entre } t_{i-1} < t \leq t_i \\ 0 & , \text{ para } t \text{ entre } t_{i-1} < t \leq t_i \end{cases} \quad (2.56)$$

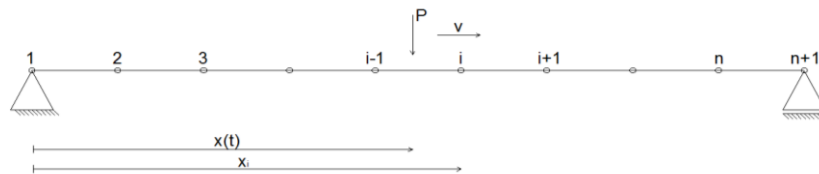


Figura 2.10 – Viga discretizada em elementos finitos e sujeita a carga móvel.

Dado que se trata de um comboio que circula em linha reta e em velocidade de ponta, a variação cíclica associada à intensidade da carga deste transporte é suficientemente baixa para poder ser desprezada ($P(t) \equiv P$). Deste modo, por simplificação, considera-se a carga P periódica, com velocidade e intensidade constantes, o que resulta num sistema com função triangular representada pela Figura 2.11.

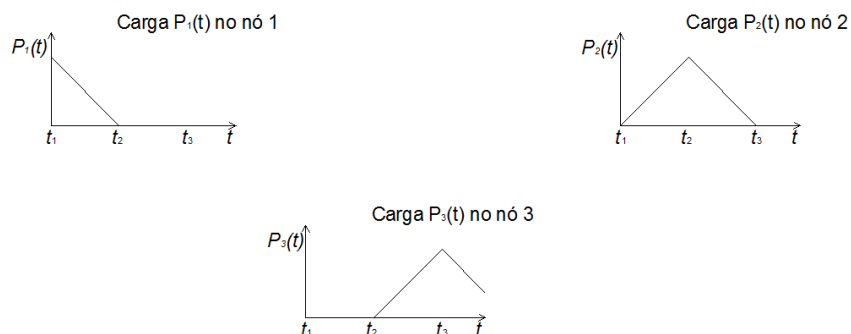


Figura 2.11 – Funções de carga nos vários nós.

Em casos em que a força aplicada corresponde a uma série de cargas, a função de carga resultante para um determinado nó irá corresponder ao somatório das funções de carga associadas a cada força P para o nó em análise. A consideração deste carregamento na Equação (2.38), e consequente resolução da equação diferencial de equilíbrio, conduziria à resposta dinâmica da barra.

3. PONTES FERROVIÁRIAS DE ALTA VELOCIDADE: COMPORTAMENTO DINÂMICO

Ao projetar-se uma ponte ferroviária de alta velocidade existem três condições fundamentais que devem ser verificadas: (i) a segurança estrutural, (ii) a segurança da via e (iii) o conforto dos passageiros. Em particular, importa garantir que a passagem do comboio não induza à estrutura uma resposta dinâmica que possa comprometer essas condições.

O dimensionamento de pontes ferroviárias de alta velocidade a nível Europeu, deve ser feito com base nos Eurocódigos, que se encontram de acordo com a diretiva 96/48/EC de 1996. Nesta diretiva encontram-se definidos os critérios de interoperabilidade para as redes europeias de alta velocidade, que deverão ser aplicados em todos os estados membros da União Europeia a fim de garantir a compatibilidade das respetivas redes de alta velocidade.

A ação estrutural é regulamentada por via de duas componentes dos Eurocódigos: (i) o Anexo A2 do Eurocódigo 0 [EN CEN 1990-A2, 2005] que estabelece algumas bases para o dimensionamento (e.g., combinação de ações), e (ii) a Parte 2 do Eurocódigo 1 [EN CEN 1991-2, 2003], que fornece os modelos de carga para a análise de pontes ferroviárias – desta última, é particularmente relevante para as pontes de alta velocidade a secção 6.4, que diz respeito aos efeitos dinâmicos (incluindo a situação de ressonância).

Parte das disposições relativas a pontes ferroviárias de alta velocidade resultam da investigação da comissão de especialistas D214 do ERRI [ERRI D214/RP9, 2001]. Esta comissão foi organizada para responder a quatro grandes questões:

- (i) Por que motivo o coeficiente dinâmico, pelo qual eram multiplicados os efeitos estáticos dos modelos de carga que representavam o tráfego ferroviário, já não é suficiente para cobrir os efeitos dinâmicos provocados pela circulação dos comboios atuais?
- (ii) Em que casos, devem ser realizadas análises dinâmicas?
- (iii) Como devem ser modeladas as pontes, a via e o comboio?
- (iv) Quais os critérios a serem respeitados tendo em vista o bom comportamento estrutural das estruturas (ponte, via e comboio)?

As disposições regulamentares do Eurocódigos oferecem as “respostas” a essas questões, e neste capítulo da tese apresentam-se algumas das disposições mais pertinentes para o problema em estudo.

3.1. COMPORTAMENTO DINÂMICO

As ações que atuam numa ponte ferroviária podem ser de três tipos principais: (i) as ações permanentes, nomeadamente o peso próprio, (ii) as ações variáveis, como o vento, a temperatura ou as ações devidas ao tráfego e (iii) e as ações acidentais, como a ação sísmica. Segundo as normas, o tráfego ferroviário impõe à estrutura ações horizontais e verticais. As ações horizontais são originadas por: forças centrífugas, forças de arranque e frenagem, força de lacete e forças criadas pela resposta combinada entre a estrutura e a via. No que diz respeito às ações verticais, estas têm origem nas solicitações exercidas pelos eixos dos veículos (transmissão do seu peso à via/estrutura) e por eventual ocorrência de descarrilamento.

Os principais fatores que podem influenciar o comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária de alta velocidade são [Figueiredo, 2007]:

- i) A tipologia das cargas móveis que circulam na via, que produzem um acréscimo ou redução da carga estática equivalente;
- ii) A passagem sucessiva de cargas igualmente espaçadas cuja frequência ou os seus múltiplos coincidem com a frequência da estrutura, podendo originar fenómenos de ressonância ou vibração excessiva do tabuleiro;
- iii) A variação de cargas aplicadas à estrutura resultantes de imperfeições da via, do carril ou de irregularidades da roda do comboio.

No dimensionamento de uma estrutura os fatores acima referidos, provocados pelas ações de tráfego, devem ser tidos em conta na determinação dos esforços, deslocamentos acelerações, etc. Sendo que a interação veículo-estrutura e as irregularidades que destes possam advir são analisadas através de modelos especiais que permitem estabelecer o equilíbrio dinâmico entre ponte e comboio. O estudo aplicado à interação veículo-estrutura não será abordado na presente dissertação.

O impacto que os fatores inerentes à via e ao veículo exibem no comportamento dinâmico torna-se menor à medida que o vão da ponte assume comprimentos maiores. Deste modo, em pontes cujo vão apresenta grandes comprimentos, o comportamento dinâmico fica de um modo geral dependente das propriedades da estrutura. Seguidamente são abordados os parâmetros estruturais que apenas afetam o comportamento dinâmico.

3.1.1. MASSA

A determinação da massa distribuída (m), em pontes ferroviárias passa não só pelos elementos estruturais, como também, pelos elementos não estruturais, sendo estes, passeios, guardas, balastro, travessas, carris, dispositivos de sinalização, etc.

A determinação da massa de uma ponte tem implicações diretas no comportamento dinâmico da estrutura. A relação existente entre a frequência fundamental e a massa da estrutura permite concluir que ao serem considerados valores crescentes da massa implica, necessariamente, a diminuição da frequência fundamental e vice-versa, desde que a rigidez da estrutura não se altere. O efeito faz-se sentir a nível da amplificação dinâmica da ponte, que assume valores menores à medida que existe um acréscimo da massa. Esta relação é resultado do aumento das forças de inércia que se opõem diretamente à ação provocada pela passagem do comboio.

Deste modo ao projetar-se uma ponte ferroviária, a amplificação dinâmica pode ser manipulada com o aumento a massa dos elementos estruturais, por exemplo o betão, ou com o aumento de massa de elementos que têm contribuição significativa neste parâmetro. O acréscimo de massa na estrutura, quando não associado à alteração de outros parâmetros, pode refletir-se negativamente no custo da estrutura.

De acordo com as normas EN CEN 1991-2 (2003) a análise dinâmica deverá ser realizada tendo em conta dois limites de massa:

- i) Subestimação da massa, considerando uma espessura mínima de balastro e densidade de balastro limpo, onde se prevê a obtenção de frequências naturais da estrutura e velocidades de ressonâncias mais elevados – permite determinar as acelerações máximas;
- ii) Superestimação da massa, considerando espessura máxima do balastro e peso volumico saturado correspondente ao balastro sujo, verificando-se nestas condições frequências naturais da estrutura e velocidades de ressonância mais baixas – permite determinar estimativas conservativas da velocidade de ressonância.

3.1.2. RIGIDEZ

A rigidez (k), dos elementos tem um efeito direto nas frequências próprias da estrutura. O que implica, que o acréscimo de rigidez numa estrutura origina, consequentemente, o aumento das frequências próprias e a diminuição da amplitude de deslocamentos, o que, por sua vez, leva ao aumento das velocidades críticas. A nível da segurança estrutural o acréscimo de rigidez é desfavorável, sendo deste modo orientado pelo EN CEN 1991-2 (2003), o recurso de valores inferiores deste parâmetro. No entanto a sobrestimação da rigidez implica normalmente o aumento da massa, o que resulta em variações insignificantes a nível da frequência natural de vibração.

3.1.3. AMORTECIMENTO

O amortecimento (ξ), presente em todas as estruturas reais, permite que a energia criada com a vibração livre ou forçada seja dissipada pelos elementos estruturais e não estruturais. Estes elementos, através dos materiais que os constituem ou pelo amortecimento existente nos apoios e juntas da estrutura, conseguem transmitir da energia do movimento ao solo.

Em situações de ressonância o amortecimento é um parâmetro muito importante na resposta dinâmica, desta forma, o amortecimento a ser considerado no dimensionamento de uma ponte deverá ser estimado com coerência de modo a não subestimar a resposta dinâmica da ponte em situações de ressonância.

A Figura 3.1, apresenta a variação do amortecimento em função do vão e do betão que constitui a ponte, sendo que na Tabela 3.1 encontram-se as expressões consideradas para o cálculo deste coeficiente.

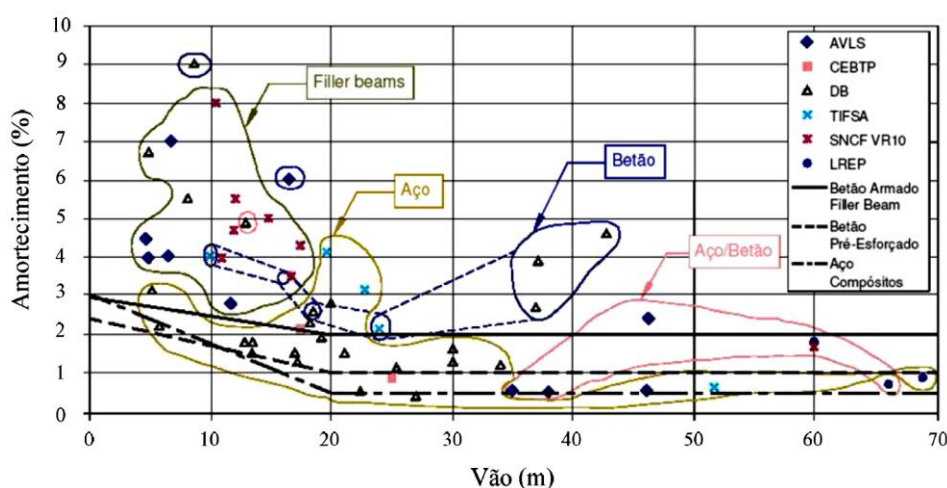


Figura 3.1 – Amortecimento em função do vão [ERRI D214, 2001]

Tabela 3.1 – Coeficiente de amortecimento a considerar no dimensionamento de pontes [EN CEN 1991-2, 2003]

Tipologia da ponte	Limite inferior do coeficiente de amortecimento	
	ξ [%]	
	$L < 20 \text{ m}$	$L \geq 20 \text{ m}$
Aço e Compósitos	$\xi = 0.5 + 0.125(20 - L)$	$\xi = 0.5$
Betão Pré-esforçado	$\xi = 1.0 + 0.07(20 - L)$	$\xi = 1.0$
Betão Armado e “Filler Beam”	$\xi = 1.5 + 0.07(20 - L)$	$\xi = 1.5$

O [EN1991-2, 2003] possibilita, em situações em que o vão é inferior a 30 m, incrementar o amortecimento ξ com a parcela $\Delta\xi$, uma vez que a interação veículo/estrutura tende a ser benéfica ao reduzir as amplitudes máximas de ressonância. O incremento pode ser calculado através da Equação 3.1, representada graficamente na Figura 3.2.

$$\Delta\xi = \frac{0.0187L - 0.00064L^2}{1 - 0.0441L - 0.0044L^2 + 0.000255L^3} \quad [\%] \quad (3.1)$$

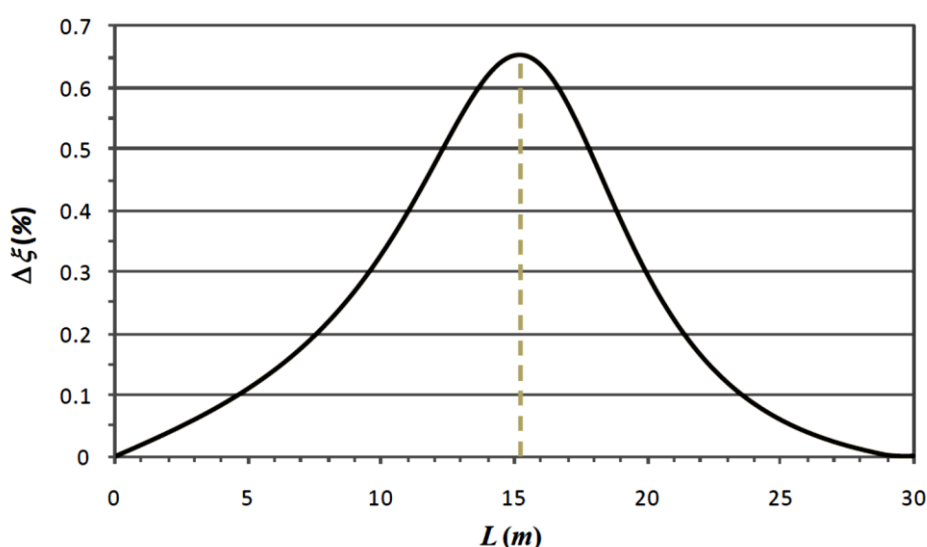


Figura 3.2 – Representação gráfica do amortecimento adicional $\Delta\xi$ em função do comprimento do vão L

3.2. CARREGAMENTO FERROVIÁRIO: CARACTERÍSTICAS DOS COMBOIOS

De acordo com o EC CEN 1991-2 (2003), a realização da análise dinâmica deve ter por base os valores correspondentes aos comboios reais que circulam a nível europeu, como também, os valores característicos dos 10 comboios que compõem o modelo HSLM (High Speed Load Model). Os valores dos mesmos são seguidamente apresentados.

3.2.1. CARREGAMENTO EXERCIDO POR COMBOIOS REAIS

A Figura 3.3 representa o conjunto de comboios que circulam a alta velocidade a nível europeu.



ETR-Y-500



ICE2



VIRGIN



EUROSTAR



TGV

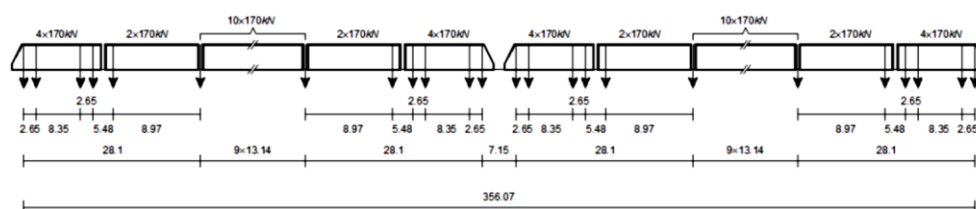
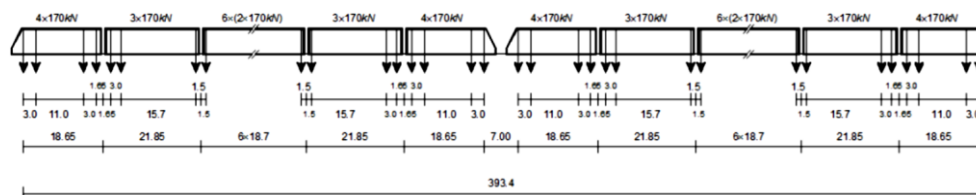
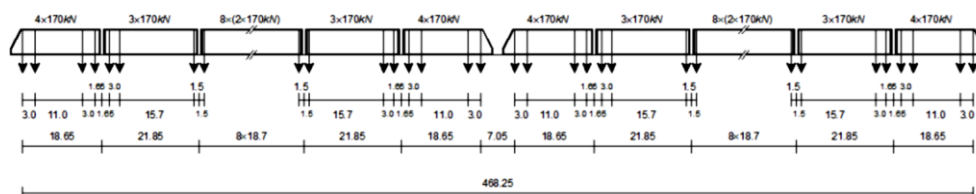
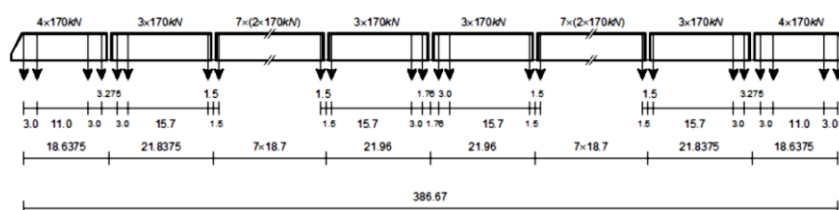
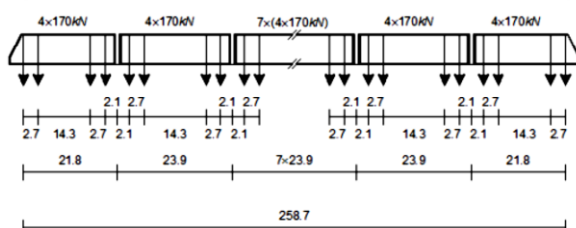
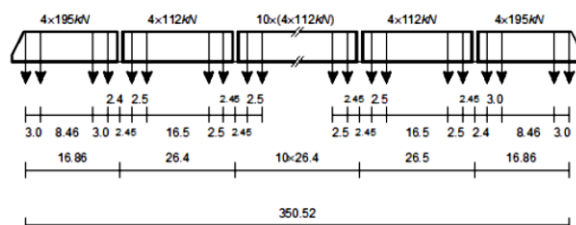
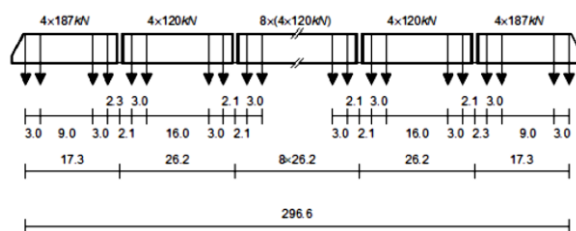


THALYS2



TALGO AV2

(a)



(b)

Figura 3.3 – Comboios da rede europeia de alta velocidade: (a) imagem e (b) modelo de carga (dimensões em [m]) [Bebiano, 2010]

Os comboios apresentados na Figura 3.3, podem ser organizados em três grupos representados pela Figura 3.4.

- i) Comboios convencionais
- ii) Comboios articulados
- iii) Comboios regulares

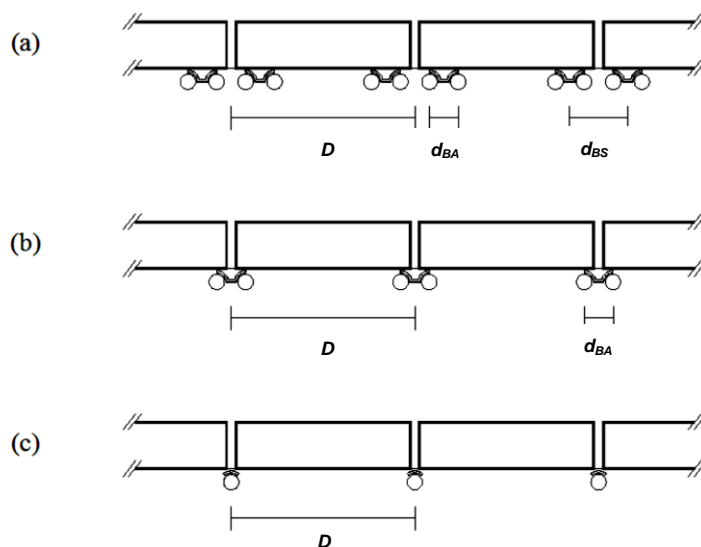


Figura 3.4 – Grupos de comboios reais: a) Convencional; b) Articulado; c) Regular

3.2.2. O MODELO DE COMBOIOS UNIVERSAIS HSLM

O modelo de carga HSLM-A é composto por 10 comboios, sendo que cada um deles é formado por: duas locomotivas; duas carruagens externas e carruagens interiores, conforme representa a Figura 3.5.

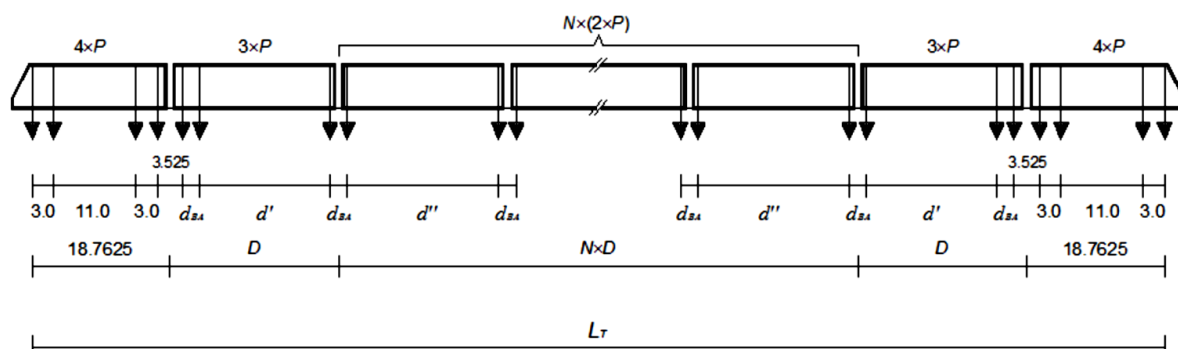


Figura 3.5 – Modelo de carga HSLM-A (parâmetros em [m])

O comprimento das carruagens (D), o número de carruagens interiores (N) e o espaçamento entre eixos de bogies (d), são retirados da Tabela. 3.2.

Tabela 3.2 – Características dos 10 comboios universais (A1 a A10) para o modelo de carga HSLM (adaptação de EN CEN 1991-2 (2003))

Comboio Universal	N	D (m)	d (m)	P (kN)
A1	18	18	2	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2	180
A4	15	21	3	190
A5	14	22	2	170
A6	13	23	2	180
A7	13	24	2	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2	210
A10	11	27	2	210

3.3. RESSONÂNCIA E SUPRESSÃO

Um dos principais problemas que se encontra no dimensionamento de pontes ferroviárias reside no fenómeno de ressonância. A ressonância ocorre quando a frequência da ação de excitação é muito próxima da frequência natural da estrutura ou dos seus múltiplos.

Em pontes ferroviárias a excitação provocada pelo conjunto de cargas móveis que representam o comboio e que caracterizam a ação periódica pode – para velocidades suficientemente altas (na gama da alta velocidade ferroviária) – levar à ocorrência de ressonância. Deste modo o conhecimento das características dos comboios, espaçamento de vagões e bogies, torna-se de elevada relevância.

Na presença de ressonância existe uma amplificação da resposta, o que resulta num aumento crescente da ação, podendo provocar o colapso da estrutura, Figura 3.6.

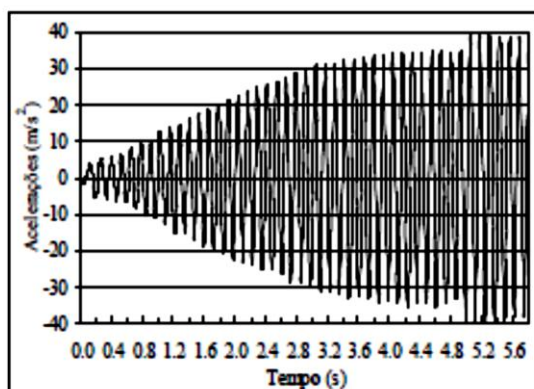


Figura 3.6 – Representação do efeito de ressonância numa ponte simplesmente apoiada

Em virtude de estabelecer o equilíbrio estrutural de uma ponte torna-se essencial a presença de amortecimento. Uma vez que, o amortecimento trabalha no sentido de dissipar a energia proveniente da excitação através da diminuição gradual da vibração. Contudo existe outro fenómeno passível de suceder com a passagem de cargas móveis, denominado por supressão. A supressão, representada na Figura 3.7, resulta a favor do equilíbrio estrutural, trata-se de um fenómeno inverso da ressonância, sendo que na sua presença ocorre a anulação das frequências de excitação.

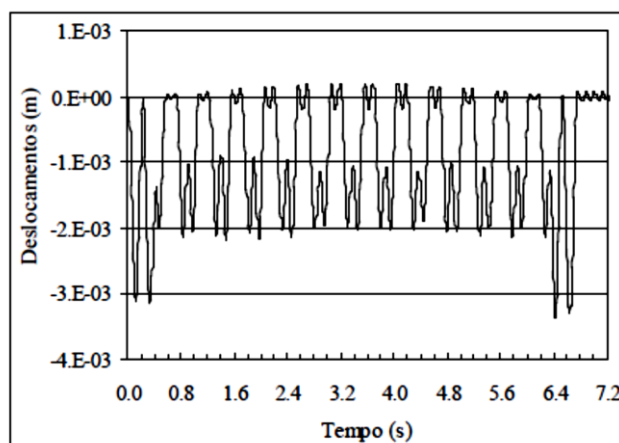
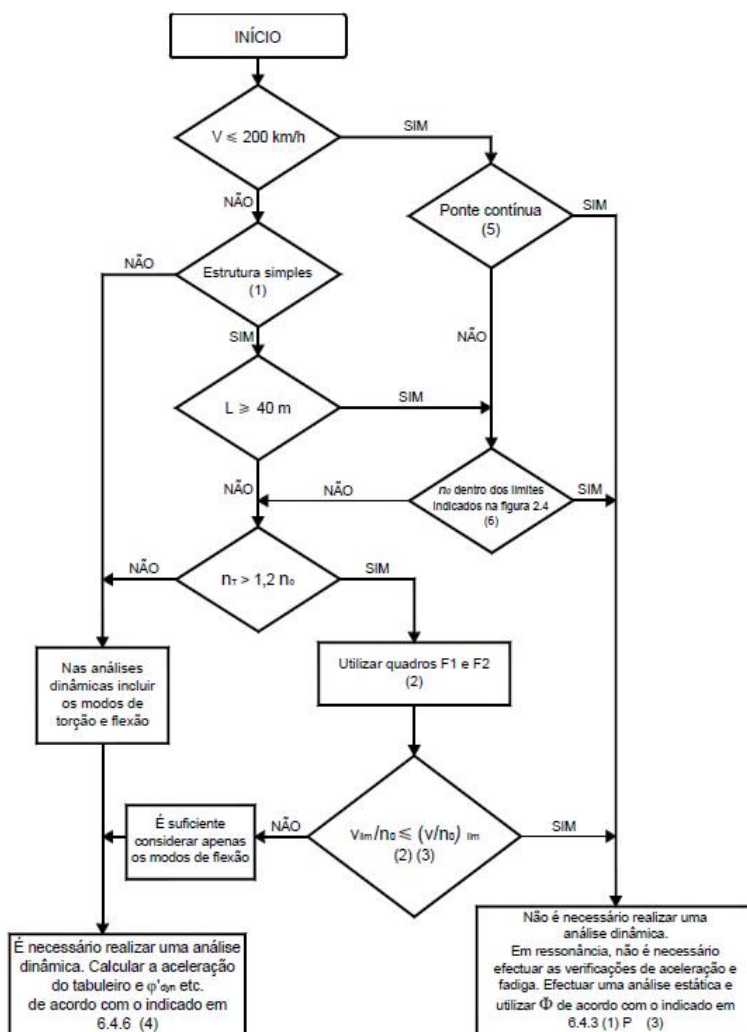


Figura 3.7 – Representação do efeito de supressão numa ponte simplesmente apoiada

3.4. FATORES QUE DETERMINAM A NECESSIDADE DE REALIZAÇÃO DE UMA ANÁLISE DINÂMICA

Os requisitos para determinar a necessidade de realização de uma análise dinâmica são ilustrados através do fluxograma da Figura 3.8.



- (1) Válido para pontes simplesmente apoiadas com comportamento semelhante ao de uma viga ou laje sem viés;
- (2) As tabelas F1 e F2 e os respectivos limites de validade são apresentados no Anexo F;
- (3) Deverá realizar-se uma análise dinâmica caso a velocidade de operação dos comboios reais iguale uma velocidade de ressonância da estrutura. Ver 6.4.6.6 e Anexo F;
- (4) ϕ'_{dyn} é um coeficiente de amplificação dinâmica para comboios reais dado em 6.4.6.5 (3);
- (5) Válido caso a ponte verifique os requisitos em termos de resistência e os limites de deformação dados no A2.4.4 do EC0 e a máxima aceleração nas carruagens (ou os limites de deformação associados) corresponda a um nível de conforto muito bom de acordo com o EC0-A2;
- (6) Para pontes em que a primeira frequência natural (n_0) se situe dentro dos limites da Figura 2.4 e a velocidade máxima da linha no local da ponte não exceda os 200 km/h, não é necessária a realização de uma análise dinâmica;
- (7) Para pontes em que a primeira frequência natural (n_0) exceda o limite superior da Figura 2.4 é necessária a realização de uma análise dinâmica. Ver também 6.4.6.1.1 (7).

Figura 3.8 – Fluxograma para a determinação da necessidade de realização de uma análise dinâmica (adaptado de EN CEN 1991-2, (2003))

Na Figura 3.8, V (km/h) representa a velocidade máxima da linha no local da ponte; L (m) é o vão; n_0 (Hz) é a 1ª frequência natural de vibração por flexão vertical da ponte; n_T (Hz) corresponde à 1ª frequência natural de vibração por torção da ponte; v_{lim} (km/h) é a velocidade nominal máxima e $(v/n_0)_{lim}$ são limites indicados no Anexo F da EN 1991-2.

Na Figura 3.9, estão representados, em função do vão, os limites superiores e inferiores para a frequência fundamental da ponte a que se refere o fluxograma da Figura 3.8.

Analisando o fluxograma da Figura 3.8, é possível concluir que o estudo de uma ponte dispensa a análise dinâmica para as situações:

- i) $V \leq 200$ km/h em pontes contínuas, desde que o nível de conforto dos passageiros seja cumprido, de acordo com o especificado no anexo A2 da EN 1990;
- ii) $V \leq 200$ km/h em pontes sem continuidade, desde que a 1ª frequência natural de vibração por flexão vertical na ponte (n_0) esteja dentro dos limites especificados na Figura 3.9;
- iii) $V > 200$ km/h em pontes com comportamento equiparado a uma viga ou laje simplesmente apoiada, com vão (L) superior a 40 m e a 1ª frequência natural de vibração por flexão vertical na ponte (n_0) dentro dos limites da Figura 3.9.

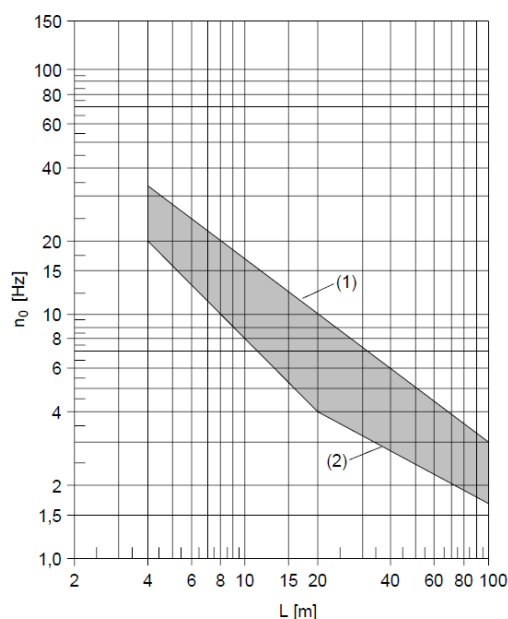


Figura 3.9.- Limites da frequência natural da ponte n_0 (Hz) em função do vão L (m)
(adaptado do EN CEN 1991-2 (2003))

Na determinação do limite superior da frequência (curva (1) da Figura 3.9) foram considerados os efeitos dinâmicos provocados pela irregularidade da via, sendo este limite definido pela seguinte expressão:

$$n_0 = 94.76L^{-0.748} \quad (3.2)$$

Relativamente ao limite inferior da frequência, este encontra-se relacionado com as amplificações dinâmicas, sendo dado pela expressão:

$$n_0 = \begin{cases} \frac{80}{L} \Leftarrow 4m \leq L \leq 20m \\ 23.58L^{-0.592} \Leftarrow 20m \leq L \leq 100m \end{cases} \quad (3.3)$$

Em casos de pontes simplesmente apoiadas, a frequência natural de vibração por flexão vertical pode ser estimada através da seguinte expressão:

$$n_0 = \frac{17.75}{\sqrt{\delta_0}} \quad (3.4)$$

onde δ_0 representa o deslocamento a meio-vão devido ao peso próprio do tabuleiro. Note-se que esta expressão constitui uma forma transformada (equivalente) da Equação 2.36 (para $n = 1$).

3.4.1. FATOR DINÂMICO Φ

O fator dinâmico Φ representa uma combinação de cálculos realizados num conjunto de pontes e elementos estruturais reais, tendo como objetivo a compreensão do comportamento dinâmico resultante do tráfego ferroviário.

Este coeficiente de cálculo afeta os efeitos estáticos provocados pelos modelos de carga LM71, SW/0 e SW/2, tendo em conta a amplificação dinâmica das tensões e dos efeitos vibratórios da estrutura. No entanto os fenómenos de ressonância não estão cobertos por este fator. Nestes casos, para que os efeitos sejam avaliados corretamente, a análise dinâmica deve ser realizada.

Em função da qualidade de manutenção da via são geralmente utilizados dois factores dinâmicos- Φ_2 ou Φ_3 , sendo as suas expressões:

i) Vias com boa manutenção:

$$\Phi_2 = \frac{1.44}{\sqrt{L_\Phi} - 0.2} + 0.82 \quad \text{com } 1.00 \leq \Phi_2 \leq 1.67 \quad (3.5)$$

ii) Vias com manutenção normal:

$$\Phi_3 = \frac{2.16}{\sqrt{L_\Phi} - 0.2} + 0.73 \quad \text{com } 1.00 \leq \Phi_3 \leq 2.00 \quad (3.6)$$

Sendo $L_\Phi(m)$ o comprimento determinante do elemento estrutural em estudo (Tabela 6.2 da EN 1991-2). Em situações onde a qualidade da via não é especificada, deverá ser utilizado o fator dinâmico Φ_3 .

4. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSONÂNCIA (DER)

4.1. GENERALIDADES

A resposta dinâmica de uma ponte, provocada pela passagem de um comboio, pode ser estimada através de diversas metodologias: analíticas; numéricas; simplificadas e empíricas. Na presente dissertação, é utilizado o Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER), desenvolvido pela comissão de Especialistas D214 do ERRI [ERRI D214/RP9, 2001]. Refira-se que existe um outro método – o Método da Linha de Influência Residual (LIR) – bastante semelhante.

Tendo em conta os fundamentos dos métodos, a aplicação do DER limita-se a pontes isostáticas com comportamento semelhante ao da viga simplesmente apoiada, onde os efeitos de torção podem ser desprezados. Refira-se que este método não tem em conta fenómenos como a interação via-comboio.

Os métodos simplificados (DER e LIR) apresentam resultados de elevada precisão relativamente à zona de ressonância, estes métodos têm por base a solução analítica da passagem de comboios em vigas simplesmente apoiadas e têm uma forte expressão na determinação da agressividade dinâmica provocada pela passagem do comboio, designada por *assinatura dinâmica*.

A metodologia simplificada permite salvaguardar o critério de interoperabilidade exigido em ERRI, pois segundo Barbero (2001), possibilita definir a envolvente de agressividade dinâmica dos vários comboios que circulam a nível Europeu, o que permite definir o intervalo de interoperabilidade entre as redes ferroviárias. Tornando-se possível projetar estruturas com um bom comportamento em serviço não só para os comboios inicialmente projetados, como também, para comboios futuros, desde que a *assinatura dinâmica* não seja ultrapassada.

4.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Com o método da Decomposição da Excitação em Ressonância, a resposta dinâmica da estrutura é obtida tendo em conta, somente, o 1º modo de vibração de flexão vertical da estrutura. A formulação do método DER envolve os seguintes passos:

i) Restringir o sistema a 1 grau de liberdade

A redução do sistema a 1 grau de liberdade é representada pela Figura 4.1.

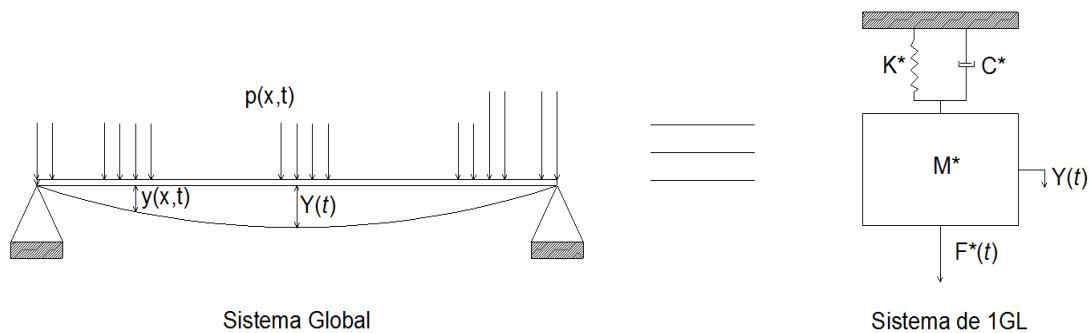


Figura 4.1 – Equivalência entre o sistema real e um sistema ideal de 1 grau de liberdade

O equilíbrio dinâmico para esta condição passa a ser escrito através da expressão (uma forma alternativa de escrever a Equação (2.41)):

$$M^* \ddot{f}(t) + C^* \dot{f}(t) + K^* f(t) = F^*, \quad (4.1)$$

sendo que M^*, C^*, K^*, F^* representam respetivamente a massa, o amortecimento, a rigidez e as forças generalizadas do sistema. De acordo com Clough e Penzien (1979), através do princípio dos trabalhos virtuais ou do princípio de Hamilton é possível obter-se

$$M^* = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} m \bar{u}(x) dx = \frac{mL}{2}, \quad (4.2)$$

$$K^* = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} EI \left(\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} \right) dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^3}, \quad (4.3)$$

$$F^*(t) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(x, t) \bar{u}(x) dx. \quad (4.4)$$

A eq. (4.1) pode igualmente escrever-se na forma

$$\ddot{f}(t) + 2\xi\omega_0\dot{f}(t) + \omega_0^2 f(t) = \frac{F^*(t)}{M^*}, \quad (4.5)$$

onde

ω_0 - frequência natural angular do sistema

ξ – coeficiente de amortecimento

sendo dados pelas expressões

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}, \quad (4.6)$$

$$\xi = \frac{C^*}{2M^*\omega_0}. \quad (4.7)$$

Para sistemas amortecidos temos que

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (4.8)$$

no entanto, em situações em que o sistema é pouco amortecido é possível considerar que $\omega_a \cong \omega_0$. A solução da Equação (4.5) é obtida através do somatório da solução homogénea e a solução particular

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t), \quad (4.9)$$

a solução homogénea é dada por (A e B são constantes que traduzem as condições iniciais do problema)

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)]. \quad (4.10)$$

A obtenção da solução particular é seguidamente descrita.

ii) Decompor a excitação exercida pelo comboio em série de Fourier;

Para que seja possível descrever a força generalizada em série de Fourier, é necessário considerar que excitação exercida pelo comboio pode ser representada por uma função periódica de período T , que corresponde ao tempo necessário para que o comboio atravesse a ponte. Deste modo a força generalizada em série de Fourier resulta em

$$F^*(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t), \quad (4.11)$$

onde

ω – frequência,

a_n e b_n – amplitude das forças sinusoidais,

são dados por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.12)$$

$$a_0 = \frac{2L}{\pi(L + x_{N-1})} \sum_{k=0}^{N-1} P_K, \quad (4.13)$$

$$a_n = \frac{4L}{\pi(L + x_{N-1})} \frac{\cos\left(\frac{Ln\omega}{2v}\right)}{1 - \left(\frac{Ln\omega}{\pi v}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} P_K \cos(n\omega t_k), \quad (4.14)$$

$$b_n = \frac{4L}{\pi(L + x_{N-1})} \frac{\cos\left(\frac{Ln\omega}{2v}\right)}{1 - \left(\frac{Ln\omega}{\pi v}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} P_K \operatorname{sen}(n\omega t_k). \quad (4.15)$$

Desta forma, a solução particular resulta da sobreposição das n respostas individuais, expressa através da equação

$$u_p(t) = \frac{a_0}{K^*} + \frac{1}{K^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \cos(n\omega t - \alpha_n)}{\sqrt{(1 - r_n^2) + (2\xi r_n)^2}} + \frac{b_n \sin(n\omega t - \alpha_n)}{\sqrt{(1 - r_n^2) + (2\xi r_n)^2}} \right], \quad (4.16)$$

onde segundo Clough e Penzien (1979)

$$\alpha_n = \arctg \left(\frac{2\xi r_n}{1 - r_n^2} \right), \quad (4.17)$$

$$r_n = \frac{n\omega}{\omega_0} \quad (4.18)$$

Assim, o deslocamento a meio vão de um sistema pode ser expresso através do somatório, das equações (4.10) e (4.16), que corresponde à solução geral de equilíbrio dinâmico

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)] + \frac{a_0}{K^*} + \frac{1}{K^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \cos(n\omega t - \alpha_n)}{\sqrt{(1 - r_n^2) + (2\xi r_n)^2}} + \frac{b_n \sin(n\omega t - \alpha_n)}{\sqrt{(1 - r_n^2) + (2\xi r_n)^2}} \right], \quad (4.19)$$

onde

$$A \cong -\frac{1}{K^*} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \quad (4.20)$$

$$B \cong -\frac{1}{K^*} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n a_n \right) \quad (4.21)$$

Assumindo as condições iniciais nulas, obtém-se

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)] + \frac{a_0}{K^*} + \frac{1}{K^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n 2r_n \xi + b_n (1 - r_n^2)}{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \operatorname{sen}(n\omega t) + \frac{a_n (1 - r_n^2) - b_n 2r_n \xi}{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \cos(n\omega t) \right], \quad (4.22)$$

Para obter a aceleração a meio vão é necessário derivar duas vezes a expressão (4.22), resultando

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 e^{-\xi\omega_0 t} [A \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)] - \frac{1}{K^*} \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^2 \left[\frac{a_n 2r_n \xi + b_n (1 - r_n^2)}{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \operatorname{sen}(n\omega t) + \frac{a_n (1 - r_n^2) - b_n 2r_n \xi}{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \cos(n\omega t) \right], \quad (4.23)$$

iii) Isolar o termo que representa a ressonância:

O método DER considera que a aceleração pode ser representada, somente, pelo termo da série de Fourier correspondente à ressonância. Para que tal se verifique é necessário garantir que $n\omega = \omega_0$, logo

$$r_n = \frac{n\omega}{\omega_0} = 1, \quad (4.24)$$

o que leva a

$$\ddot{u}(t) = \left[-\frac{\omega_0^2}{\xi K^*} \frac{2L}{\pi(L + X_{N-1})} \frac{\cos\left(\frac{L\omega_0}{2v}\right)}{1 - \left(\frac{L\omega_0}{\pi v}\right)^2} \left(\operatorname{sen}(\omega_0 t) \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos(\omega_0 t_k) + \cos(\omega_0 t) \sum_{k=0}^{N-1} P_k \operatorname{sen}(\omega_0 t_k) \right) \right] (1 - e^{-\xi\omega_0 t}) \quad (4.25)$$

Como simplificação

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos(\omega_0 t_k) \quad (4.26)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin(\omega_0 t_k) \quad (4.27)$$

sendo que

$$C_n \cos(\omega_0 t_k) + S_n \sin(\omega_0 t_k) = \sqrt{C_n^2 + S_n^2} \sin(\omega_0 t_k - \phi) \quad (4.28)$$

Reescrevendo a equação (4.25)

$$\ddot{u}(t) = \left[-\frac{\omega_0^2}{\xi K^*} \frac{2L}{\pi(L + x_{N-1})} \frac{\cos\left(\frac{L\omega_0}{2v}\right)}{1 - \left(\frac{L\omega_0}{\pi v}\right)^2} \left(\sqrt{C_n^2 + S_n^2} \sin(\omega_0 t_k - \phi) \right) \right] (1 - e^{-\xi \omega_0 t}) \quad (4.29)$$

iv) Eliminar o fator tempo:

A eliminação do fator tempo é alcançada tendo em consideração as seguintes condições

$$\sqrt{C_n^2 + S_n^2} \sin(\omega_0 t_k - \phi) \leq \sqrt{C_n^2 + S_n^2} \quad (4.31)$$

$$1 - e^{-\xi \omega_0 t} \leq 1 - e^{-\xi \omega_0 \left(\frac{x_{N-1} + L}{v}\right)} \quad (4.32)$$

Deste modo é possível definir o comprimento de onda de excitação, λ , como

$$\lambda = \frac{v}{n_0} \quad (4.33)$$

levando à relação

$$u \leq \left(\frac{8\pi f_0^2}{K} \right) \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 - 1} \right| \frac{L}{\xi(L + x_{N-1})} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2} \right] \left(1 - e^{-2\pi\xi \frac{x_{N-1}+L}{\lambda}} \right) \quad (4.34)$$

a relação pode ser simplificada, reduzindo o segundo termo ao produto de três fatores

$$\ddot{u} \leq C_t A\left(\frac{L}{\lambda}\right) G(\lambda) \quad (4.35)$$

onde

C_t – representa um fator constante

$A\left(\frac{L}{\lambda}\right)$ – representa a linha de influencia

$G(\lambda)$ – representa o espectro devido à passagem do comboio

em que

$$C_t = \left(\frac{8\pi n_0^2}{K^*} \right) = \frac{4}{mL\pi} \quad (4.36)$$

$$A\left(\frac{L}{\lambda}\right) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 - 1} \right| \quad (4.37)$$

$$G(\lambda) = \frac{L}{\xi(L + x_{N-1})} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2} \right] \times \left(1 - e^{-2\pi\xi \frac{x_{N-1}+L}{\lambda}} \right) \quad (4.38)$$

Uma vez que o fator $G(\lambda)$ representa a excitação do comboio e a resposta da ponte em ressonância, considera-se desprezável o contributo do vão da ponte (L) face ao comprimento do comboio. Deste modo o fator ($G(\lambda)$) passa a depender somente das características do comboio e do amortecimento estrutural, reescrevendo-se (4.38), obtém-se

$$G(\lambda) = \frac{1}{\xi x_{N-1}} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2} \right] \left(1 - e^{-2\pi \xi \frac{x_{N-1}}{\lambda}} \right) \quad (4.39)$$

v) Considerar a existência de sub-comboios.

Atendendo à expressão dada para o cálculo de $G(\lambda)$ em (4.39), a resposta dinâmica ocorre quando o comboio atravessa na sua totalidade a ponte. No entanto existem situações em que as acelerações máximas são atingidas durante a passagem do comboio pela ponte. Deste modo, para colmatar esta lacuna do método DER, introduz-se o conceito de sub-comboio Figura 4.1, passando a ser considerado o espectro dos comboios como o valor máximo obtido do conjunto de sub-comboios, cujo cálculo se pode efetuar com a Equação (4.40).

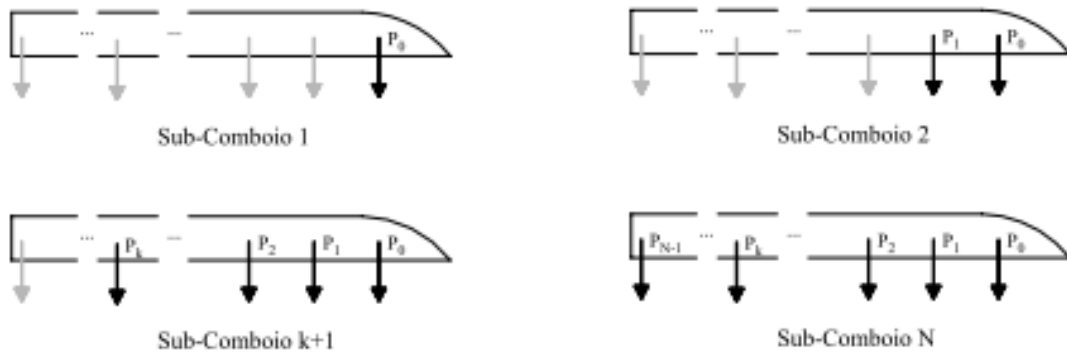


Figura 4.2 – Ilustração do conceito de sub-comboio [Ribeiro, 2004]

$$G(\lambda) = \max_i \frac{1}{\xi x_{N-1}} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2} \right] \times \left(1 - e^{-2\pi \xi \frac{x_{N-1}}{\lambda}} \right) \quad (4.40)$$

5. ANÁLISE DINÂMICA DO VIADUTO DE EL GENIL

Neste capítulo faz-se um breve estudo do comportamento dinâmico do viaduto de El Genil, sendo os resultados comparados com os reportados em Bebianco (2010). Será também investigada a influência (i) do espaçamento entre eixos do comboio e (ii) de diferentes valores do amortecimento estrutural.

5.1. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA

O viaduto de El Genil localiza-se no tramo III da linha ferroviária de alta velocidade que estabelece a ligação Córdoba-Málaga, em Espanha. O viaduto apresenta um tabuleiro com um desenvolvimento de 322 m, constituído por sete vigas simplesmente apoiadas, com 46 m de comprimento, como mostra a Figura 5.1.

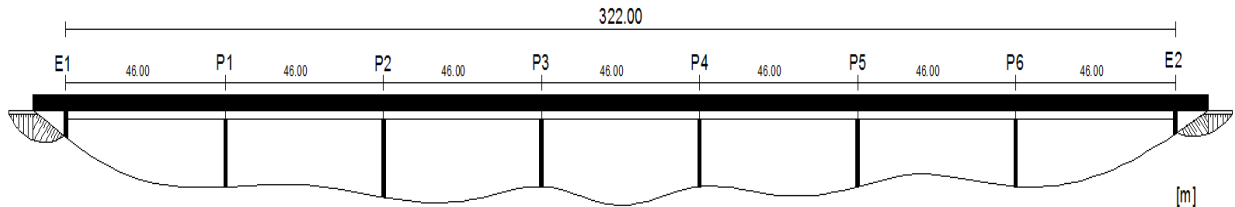


Figura 5.1 – Representação do perfil longitudinal do viaduto del Genil

O tabuleiro apresenta secção transversal em forma de caixão unicelular de betão armado pré-esforçado, representada na Figura 5.2, e apresentam características geométricas e mecânicas idênticas, sendo as propriedades mecânicas do betão $E = 36,3GPa$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2,5ton/m^3$. Em termos do coeficiente de amortecimento considerou-se $\xi = 2\%$. O viaduto inclui duas vias ferroviárias, sendo que o tabuleiro tem 14m de largura, 3,80m de altura e uma distância entre os eixos das vias de 4,70m.

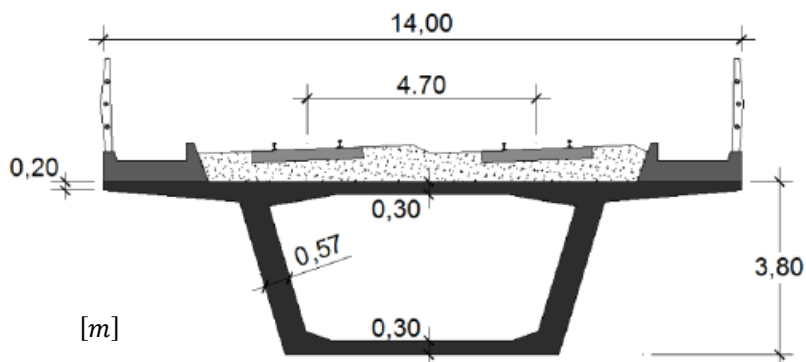


Figura 5.2 – Representação do perfil transversal do viaduto de El Genil

Tendo em conta as características da secção transversal, são obtidos os valores para as propriedades geométricas de massa apresentados na Tabela 5.1. Sendo que a massa por metro linear (\bar{m}), assume o valor de $39,94 \text{ ton/m}$, que corresponde ao resultado da soma dos massa dos elementos estruturais, onde a armadura e os respetivos vazios necessários à sua introdução não são contabilizados ($\rho A = 26,25 \text{ ton/m}$), e dos elementos não estruturais, tais como o balastro, guarda balastro, travessas e via, guarda de segurança, catenária, passeios e condutas de cabos, que contribuem com $13,69 \text{ ton/m}$.

Tabela 5.1 – Características geométricas e mecânicas relevantes da secção transversal do viaduto de El Genil

A (m^2)	I_z (m^4)	\bar{m} (ton/m)
10,50	21,03	39,94

5.2. ANÁLISE DE VIBRAÇÃO

A análise de vibração do viaduto del Genil, que conduz à determinação das suas frequências e respetivos modos naturais de vibração, é efetuada com recurso à teoria exposta em 2.2.2.1. Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores da 5 primeiras frequências naturais de vibração, obtidas por via (i) da aplicação da eq. (2.36) e (ii) reportados por Bebiano (2010), com recurso a um modelo da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) – neste último caso, os valores dizem respeito a análises restritas a vibrações por flexão (i.e., não são incluídos os modos de torção, nem os modos locais/distorcionais).

Tabela 5.2 – As 5 primeiras frequências naturais do viaduto del Genil

MODO DE VIBRAÇÃO À FLEXÃO SIMPLES	FREQUÊNCIA NATURAL ⁽¹⁾	FREQUÊNCIA NATURAL ⁽²⁾	δ (%)
	(Hz)		
1º	3,25	3,30	-1,65
2º	12,98	13,05	-0,52
3º	29,21	28,75	1,60
4º	51,93	49,71	4,46
5º	81,14	73,91	9,78

(1) – Frequência natural obtida de forma analítica através da Equação (2.36)

(2) – Frequência natural obtida através da GBT por Bebianco (2010)

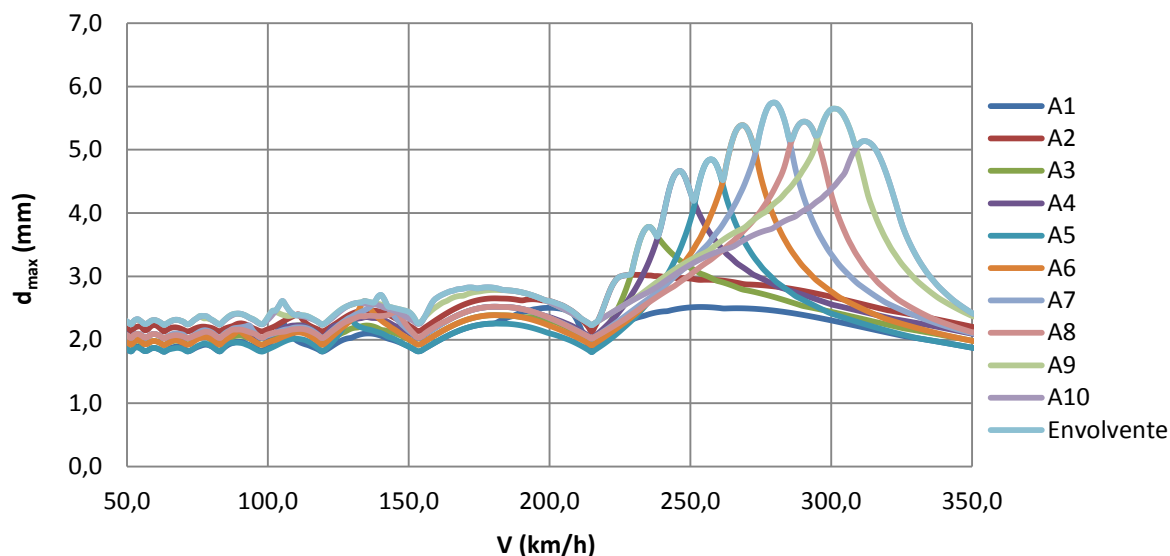
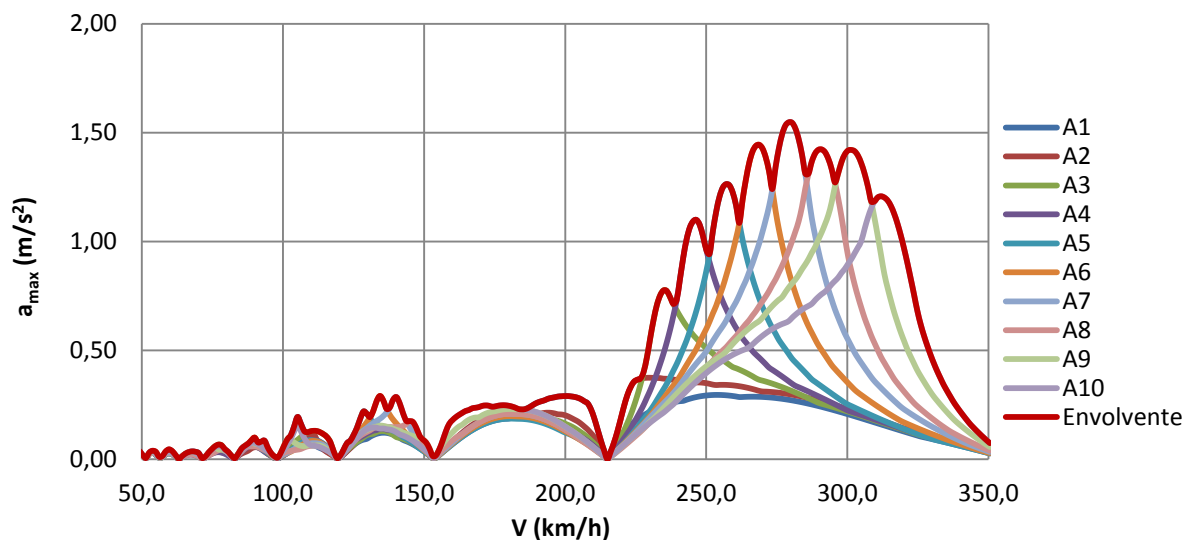
Comparando os resultados fornecidos pela Equação (2.36) e os valores obtidos por Bebianco (2010), constata-se que a discrepância é (i) razoavelmente baixa para os 3 primeiros modos de vibração ($\delta < 2\%$) mas (ii) significativa para os 2 últimos. Esta diferença, que aumenta com a ordem do modo, pode estar relacionada com o facto de a formulação da GBT incluir o efeito da inércia de rotação da secção, enquanto a formulação subjacente à Equação (2.36) apenas contabiliza o movimento de translação da secção à flexão.

Contudo, tendo em conta que a aplicação do método DER tem como pressuposto a obtenção da resposta dinâmica da estrutura somente com o 1º modo de vibração à flexão vertical (como se viu em 4.2), torna-se possível assegurar a validade de aplicação do método uma vez que se verifica uma diferença menor que 3%, em relação ao método GBT validado pelo trabalho de Bebianco (2010).

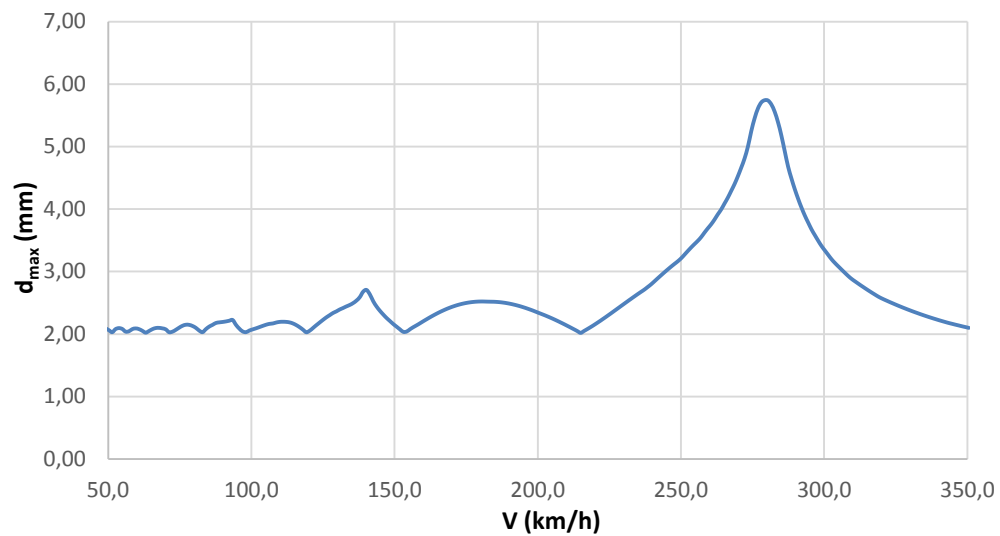
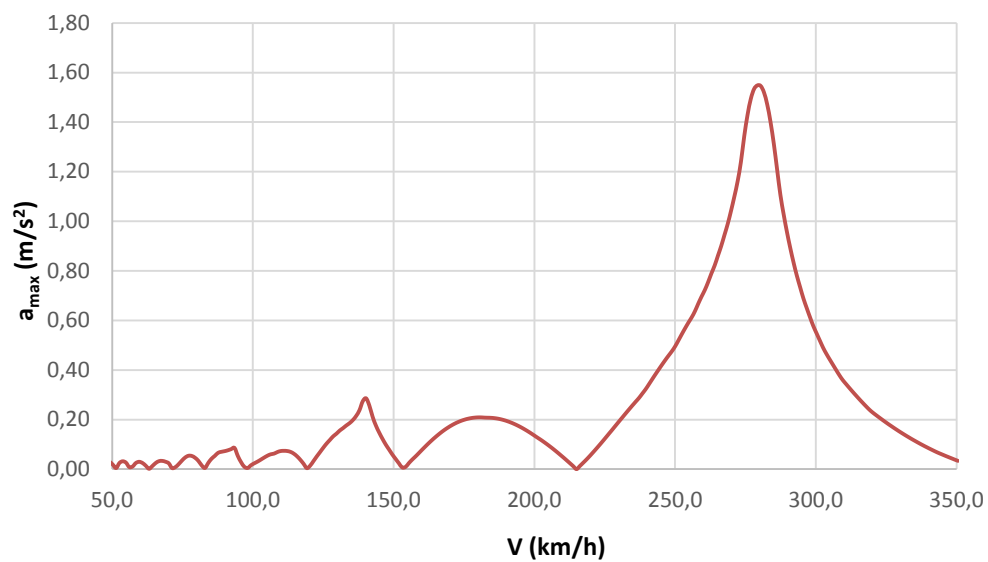
5.3. ANÁLISE DINÂMICA

5.3.1. RESPOSTA A COMBOIOS UNIVERSAIS DO MODELO HSLM-A

O tabuleiro anteriormente descrito foi analisado com recurso ao método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER) - Anexo, tendo sido obtidos os resultados representados através dos Gráficos. 5.1 e 5.2, que representam respetivamente, os efeitos dinâmicos a nível de descolamentos (d_{\max}) e acelerações (a_{\max}) no meio-vão, resultantes da passagem dos 10 comboios universais HSLM A1-A10.

Gráfico 5.1 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios universais do modelo HSLM: d_{\max} vs V Gráfico 5.2 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios universais do modelo HSLM: a_{\max} vs V

Tal como em Bebiano (2010) o comboio universal HSLM - A7 assume os valores máximos tanto a nível de deslocamentos como a nível de acelerações, sendo o resultado da análise dinâmica para este comboio apresentando isoladamente através dos Gráficos 5.3 e 5.4, que representam respetivamente os deslocamentos e acelerações máximos para uma gama de velocidades que varia entre os 50 e os 350 km/h .

Gráfico 5.3 – Resposta do tabuleiro à passagem do comboio HSLM-A7: d_{\max} vs V Gráfico 5.4 – Resposta do tabuleiro à passagem do comboio HSLM-A7: a_{\max} vs V

Na Tabela 5.3, estabelece-se a comparação entre os resultados máximos referentes (i) à velocidade de ressonância (V_{res}), (ii) ao deslocamento e (iii) à aceleração máximos obtidos e os reportados em Bebianco (2010).

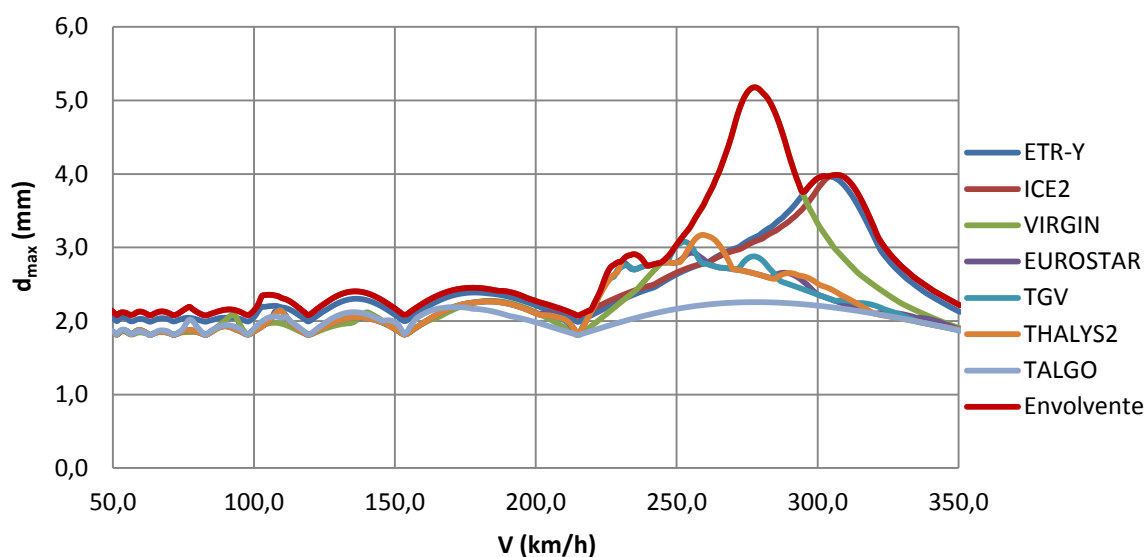
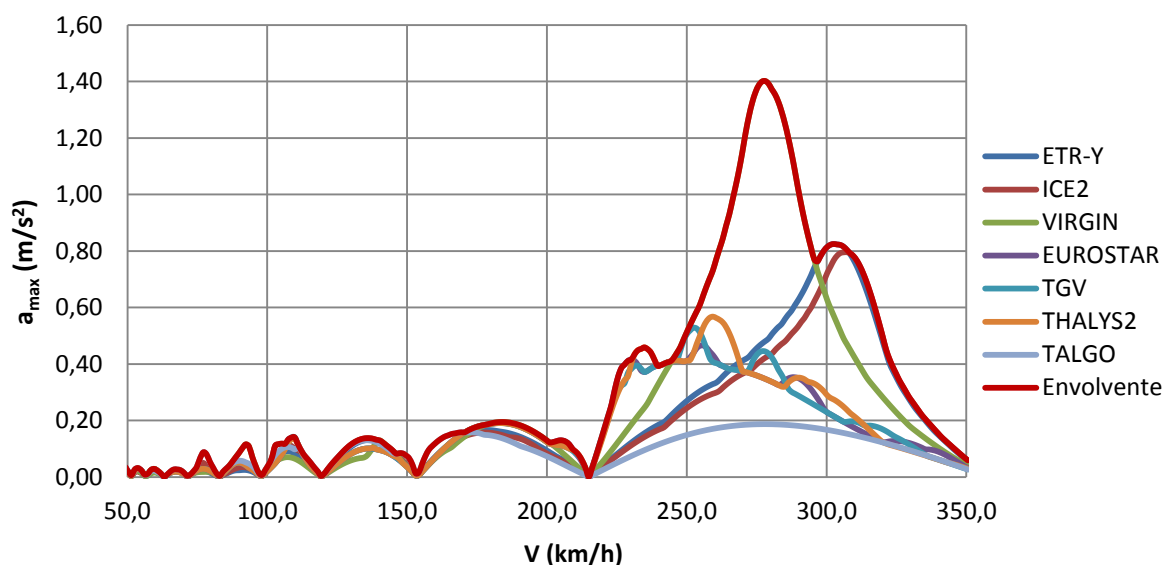
Tabela 5.3 – HSLM – A7 d_{max} e a_{max} (comparação com GBT [Bebiano, 2010])

	DER	GBT [Bebiano, 2010]	δ (%)
V_{res} [km/h]	279,2	285	-2,0%
d_{max} [mm]	5,74	6,9	-16,8%
a_{max} [m/s ²]	1,55	2,13	-27,3%

Observa-se que, embora haja um bom acordo entre as duas estimativas da velocidade de ressonância, os valores da resposta dinâmica obtidos com a aplicação do método DER apresentam-se significativamente abaixo dos obtidos através da análise GBT realizada por Bebiano (2010). Tal diferença, um pouco surpreendente, pode em parte ser explicada pelo facto de o método da GBT, baseado no princípio da sobreposição modal, considerar os modos de vibração de ordem superior.

5.3.2. RESPOSTA A COMBOIOS REAIS

Foi também obtida a resposta dinâmica para a passagem de 7 comboios reais: *ETR-Y*, *ICE2*, *Virgin*, *Eurostar*, *TGV*, *Talgo* e *Thalys 2*. A resposta, novamente em termos de d_{max} e a_{max} , é apresentada nos Gráficos 5.5 e 5.6.

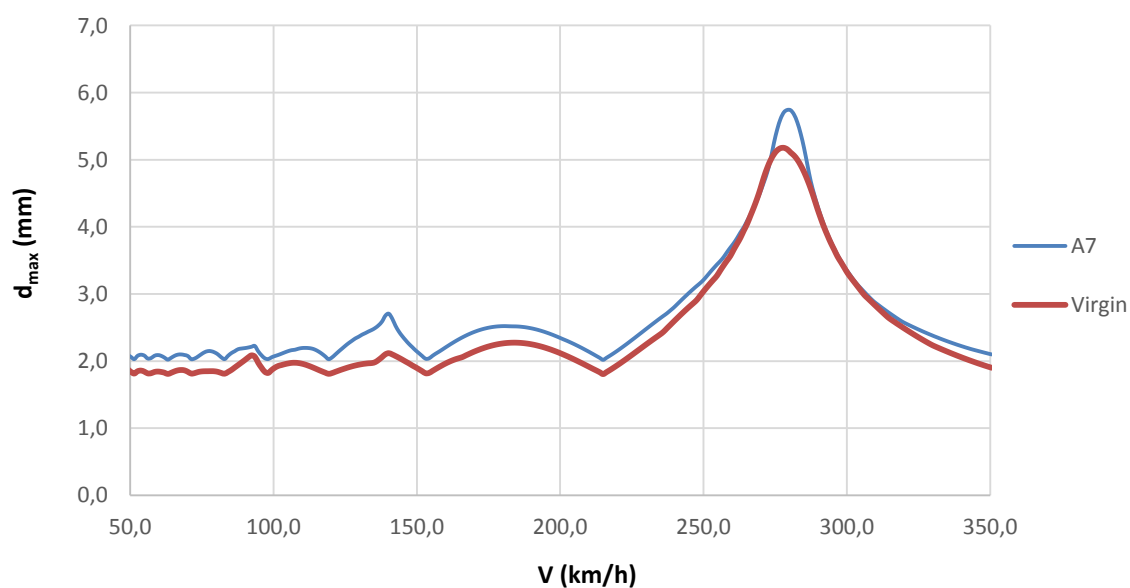
Gráfico 5.5 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios reais: d_{\max} vs V Gráfico 5.6 – Resposta do tabuleiro à passagem dos comboios reais: a_{\max} vs V

Como se pode ver, os valores máximos de deslocamento e aceleração, são atingidos para o comboio *Virgin*, a uma velocidade de ressonância $V_{res} = 278.1 \text{ km/h}$ valor que está em boa concordância com o que foi obtido por Bebian (2010), 271 km/h . Na Tabela 5.4 faz-se a comparação com os valores obtidos para o comboio HSLM – A7.

Tabela 5.4 – Comparação entre as respostas dinâmicas obtidas para os comboios HSLM-A7 e Virgin

	Virgin	HSLM-A7	δ (%)
V_{res} [km/h]	278,1	279,2	-0,4%
d_{max} [mm]	5,18	5,74	-10,9%
a_{max} [m/s ²]	1,40	1,55	-10,6%

Ao comparar os valores representados nos Gráficos 5.7 e 5.8 e os valores da Tabela 5.4, que representam os valores máximos do conjunto dos comboios universais e reais, HSLM-A7 e *Virgin*, é possível concluir que os deslocamentos e acelerações do HSLM-A7 apresentam valores, maioritariamente, superiores ao comboio *Virgin*, pelo que seria este o “comboio crítico” a considerar no dimensionamento do tabuleiro.

Gráfico 5.7 – Comparação entre as respostas para os comboios HSLM-A7 e Virgin: d_{max}

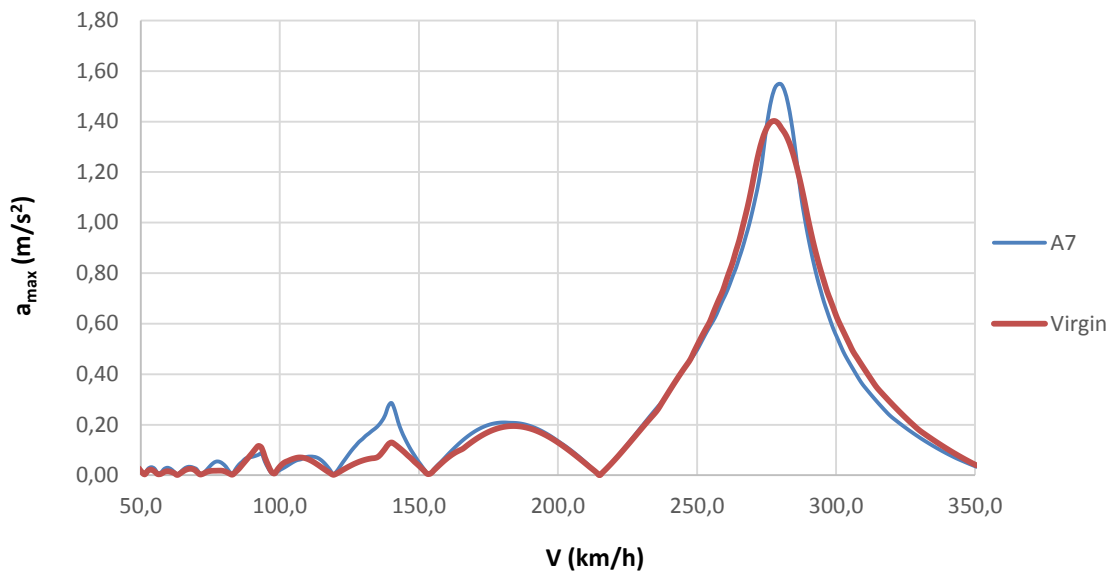


Gráfico 5.8 – Comparação entre as respostas para os comboios HSLM-A7 e Virgin: a_{\max}

No entanto no que diz respeito aos deslocamentos, no intervalo de 250 a 300 km/h, os valores de ambos chegam a coincidir. Já em relação às acelerações máximas os valores obtidos na análise dinâmica do comboio real comboio *Virgin* ultrapassam os resultados do HSLM-A7 nas velocidades entre os 250-275 km/h e 280-300 km/h.

5.4. INVESTIGAÇÃO COMPLEMENTAR

Na secção anterior fez-se uma análise dinâmica “habitual” do tabuleiro, considerando os parâmetros mecânicos e geométricos da ponte e os comboios preconizados pela regulamentação. Nesta secção, faz-se um pequeno estudo que se situa mais no âmbito da investigação, analisando a evolução da resposta do viaduto de El Genil com a variação de dois parâmetros: (i) o espaçamento entre eixos do comboio, para um comboio fictício de eixos igualmente espaçados e (ii) o coeficiente de amortecimento da estrutura.

5.4.1. INFLUÊNCIA DO ESPAÇAMENTO DE EIXOS

Com o objetivo de avaliar as implicações do espaçamento regular na resposta crítica do viaduto, considerou-se um comboio fictício com 100 eixos igualmente espaçados de D , que se fez variar entre 10 m, 14 m, 18 m,... sucessivamente, adicionando sempre 4 m até ao espaçamento de $D = 50$ m – ver Figura 5.3. A carga por cada eixo foi tida como uniforme, e igual a 100kN.

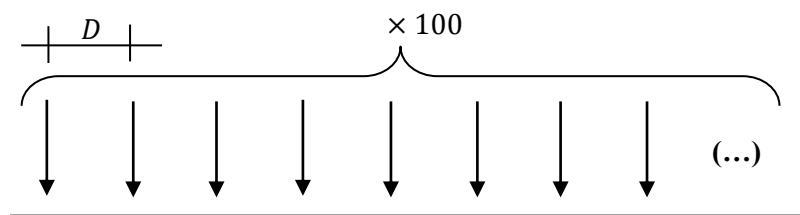


Figura 5.3 – Esquema do modelo do comboio com eixos uniformemente espaçados.

O estudo inerente ao espaçamento regular foi desenvolvido com a folha de cálculo desenvolvida para as análises realizadas em 5.3.1 e 5.3.2, com a diferença da utilização do parâmetro que representa a resposta estática – ou seja, os resultados apresentados nos gráficos traduzem apenas a parcela dinâmica da resposta.

A resposta dinâmica à passagem do referido comboio é apresentada nos Gráficos. 5.9 e 5.10.

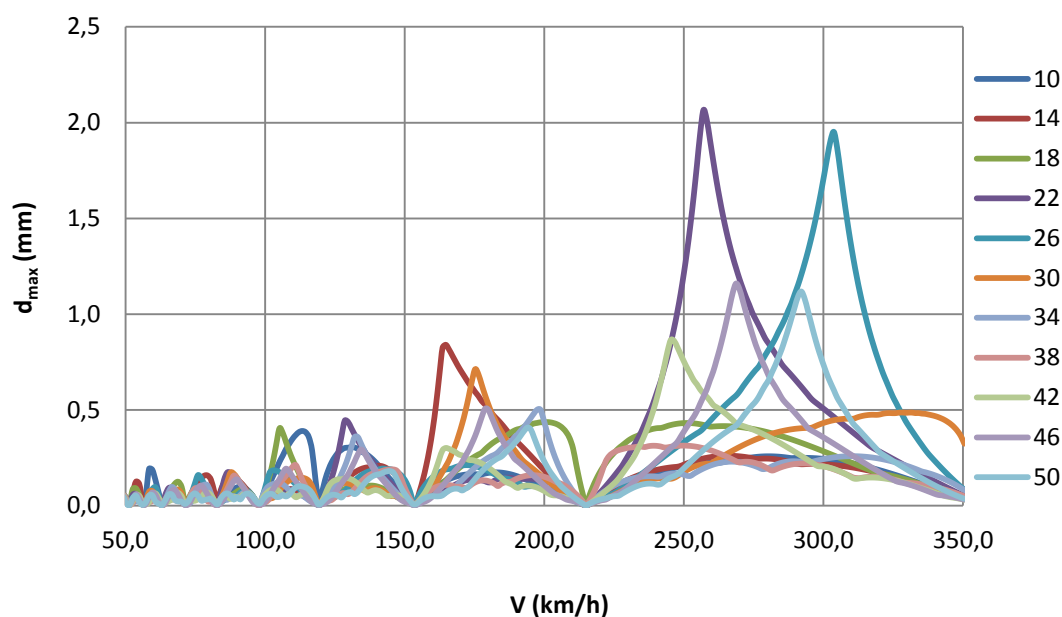


Gráfico 5.9 – Resposta dinâmica à passagem do comboio de eixos igualmente espaçados: d_{\max} .

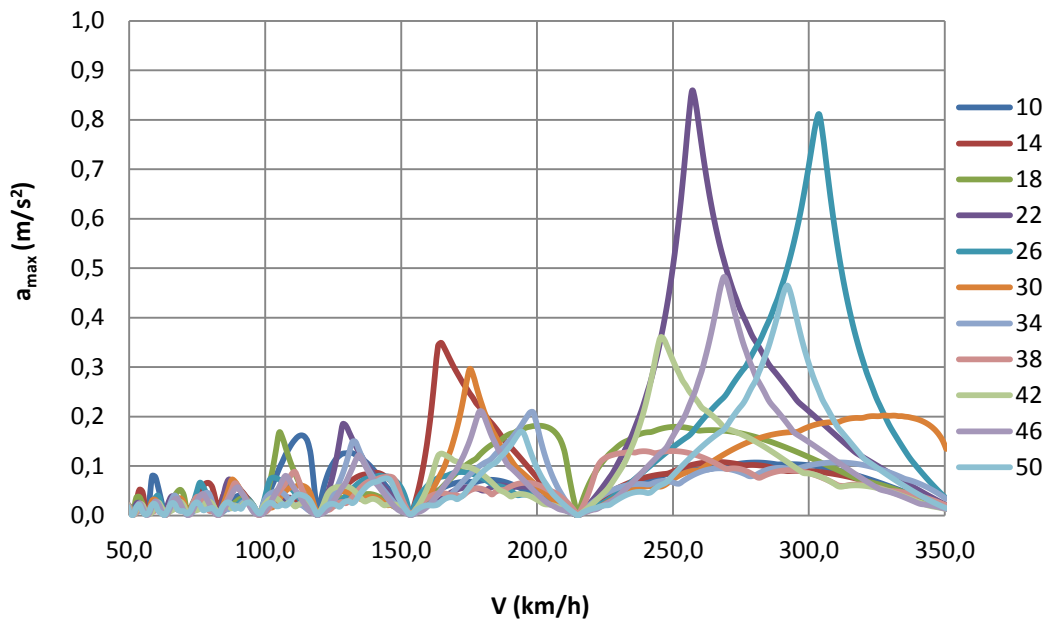


Gráfico 5.10 – Resposta dinâmica à passagem do comboio de eixos igualmente espaçados: a_{max} .

Analisando os resultados da aplicação do conjunto de cargas móveis igualmente espaçadas verifica-se com clara evidencia que o comboio cujo espaçamento regular é igual a $D = 22\text{ m}$, representa os valores máximos de deslocamentos e acelerações para a gama de comboios em estudo, sendo que atinge o deslocamento e aceleração máximos de $d_{max} = 2.07\text{ mm}$ e $a_{max} = 0.86\text{ m/s}^2$, a uma velocidade de ressonância de $V_{res} = 257.0\text{ km/h}$.

No entanto é notório que o comboio $D = 26\text{ m}$ também produz uma resposta dinâmica relevante, o que levou a uma estudo direccionado ao intervalo de espaçamentos entre $D = 22\text{ m}$ e $D = 26\text{ m}$, considerou-se assim o comboio com espaçamento regular cuja distância entre eixos é igual a $D = 23\text{ m}$, obtendo-se os resultados dos Gráficos 5.11 e 5.12.

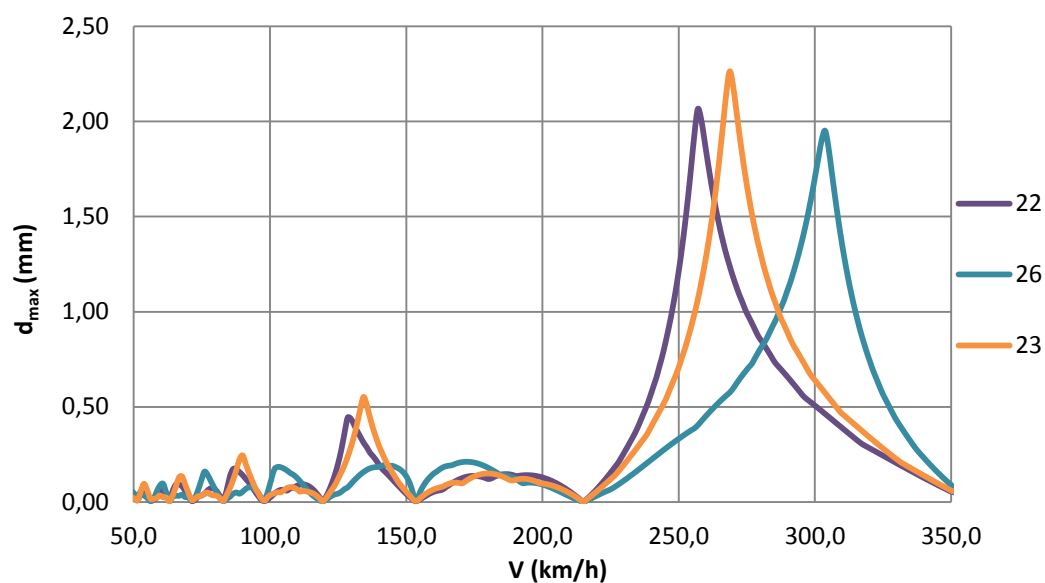


Gráfico 5.11 – Resposta dinâmica à passagem do comboio regular com $D = 22\text{ m}$, 23 m e 26 m : d_{\max} .

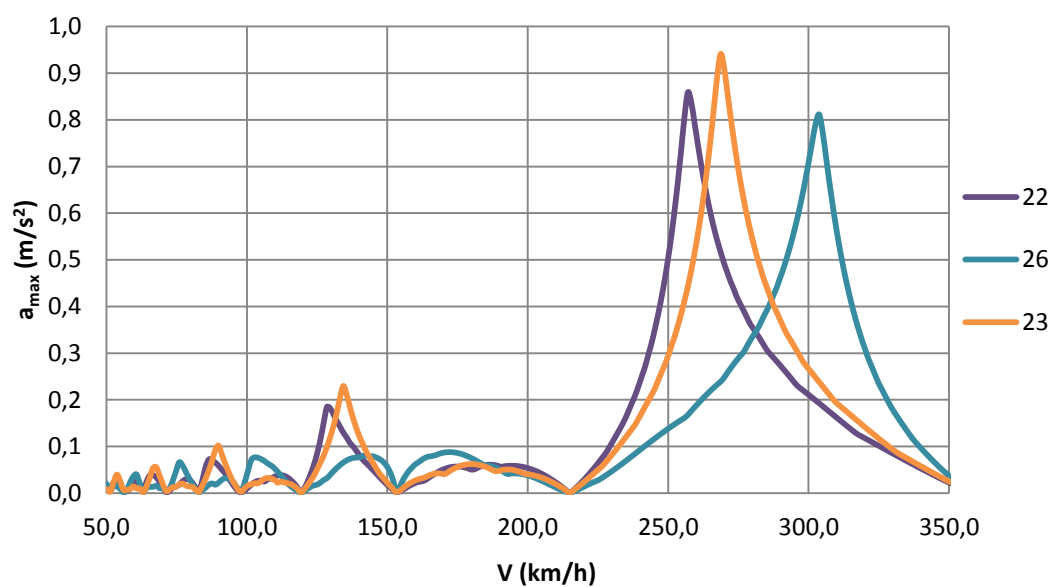


Gráfico 5.12 – Resposta dinâmica à passagem do comboio regular com $D = 22\text{ m}$, 23 m e 26 m : a_{\max} .

Com a análise dos Gráficos 5.11 e 5.12 é possível verificar que o espaçamento $D = 23\text{ m}$, gera para a velocidade de ressonância $V_{res} = 268.7\text{ km/h}$, os valores mais elevados de deslocamento e aceleração, comparativamente com $D = 22\text{ m}$ e $D = 26\text{ m}$, acontecendo para o espaçamento $D = 23\text{ m}$, $d_{max} = 2.26\text{ mm}$ e $a_{max} = 0.94\text{ m/s}^2$.

Com este estudo é possível concluir que, para a mesma situação de carga, o espaçamento entre eixos que se revela como o crítico, i.e, o espaçamento com o qual se atinge os máximos valores de deslocamento e aceleração, será igual a $D_{cri} = L/2$. Nas condições do viaduto El Genil, sendo o L de cada viga igual a 46m, o espaçamento crítico entre os eixos do comboio é de 23m.

5.4.2. INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO

O amortecimento é um fator com significativa grande influência na resposta dinâmica de uma estrutura, sobretudo numa situação de ressonância. Para realizar o estudo do comportamento dinâmico no viaduto El Genil face à variação de amortecimento, considerou-se o comboio crítico HSLM–A7, fazendo-se variar o coeficiente de amortecimento (ξ), no intervalo de 0% a 5%.

Deste estudo resultam os Gráficos 5.13 e 5.14, que representam o deslocamento e aceleração máximos, respetivamente. Observa-se que, como esperado, a redução do coeficiente de amortecimento proporciona um aumento significativo (não proporcional) em relação aos máximos atingidos tanto a nível de deslocamento como a nível de aceleração – é de notar que, na zona do pico de ressonância, o gráfico se assemelha muito ao da Fig. 2.5, relativo à ressonância devida a um carregamento harmónico.

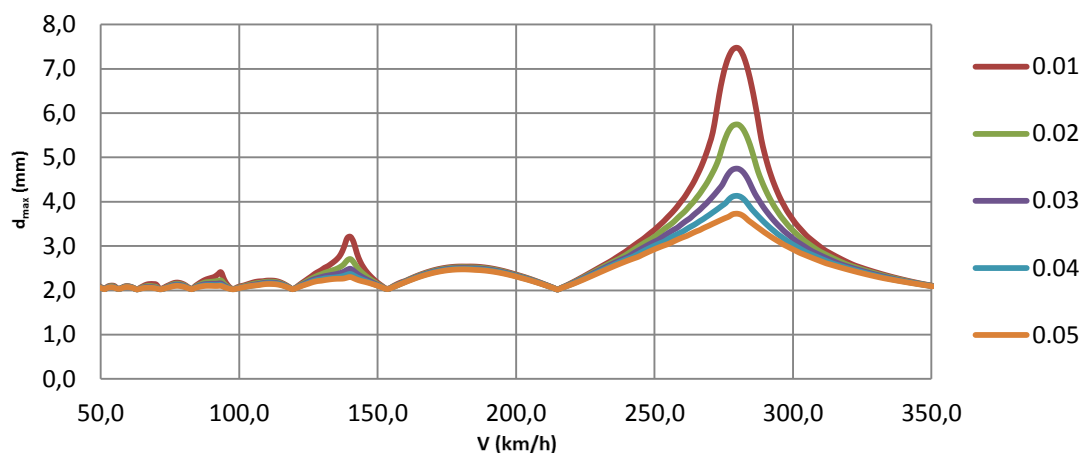


Gráfico 5.13 – Influência do fator de amortecimento (ξ) na resposta ao comboio HSLM-A7: d_{max} .

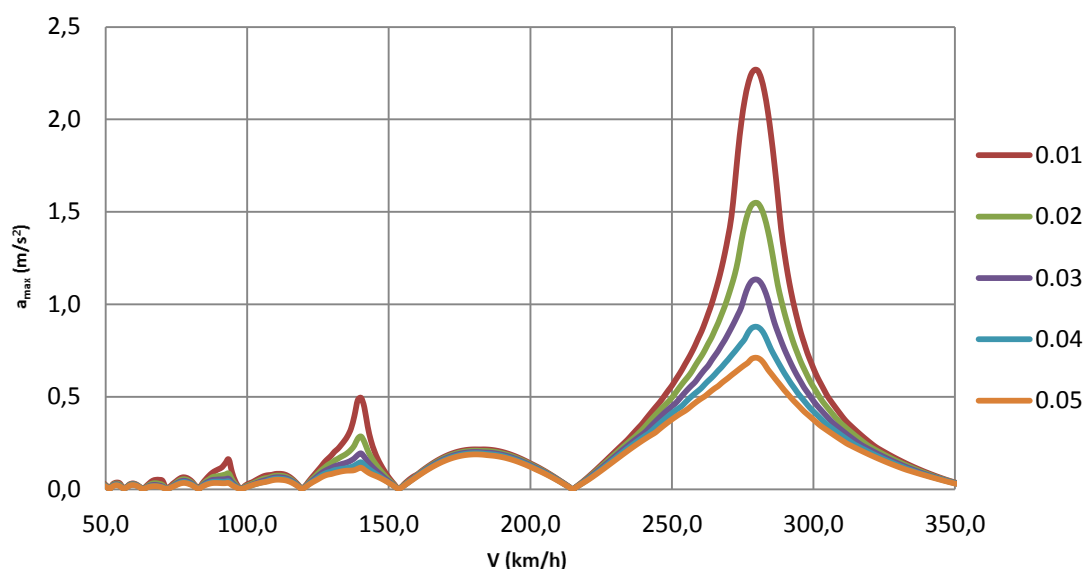


Gráfico 5.14 – Influência do fator de amortecimento (ξ) na resposta ao comboio HSLM-A7: a_{\max} .

A realização deste estudo pretendia verificar também os valores atingidos na análise dinâmica, com a aplicação do método DER, considerando amortecimento nulo ($\xi = 0$), uma vez que a inexistência de amortecimento conduz a respostas “cruas” por parte da estrutura. Contudo verifica-se que as fórmulas do método DER não permitem a consideração exata de $\xi = 0$ %. Em alternativa considerou-se $\xi = 1^{-8}$ %, que permitiu desenvolver o Gráficos 5.15 e 5.16, onde se obtêm valores de deslocamento e aceleração com uma amplificação na ordem dos 46.2 e 56.9%, respetivamente, quando comparados com os resultados obtidos em 5.3.1.

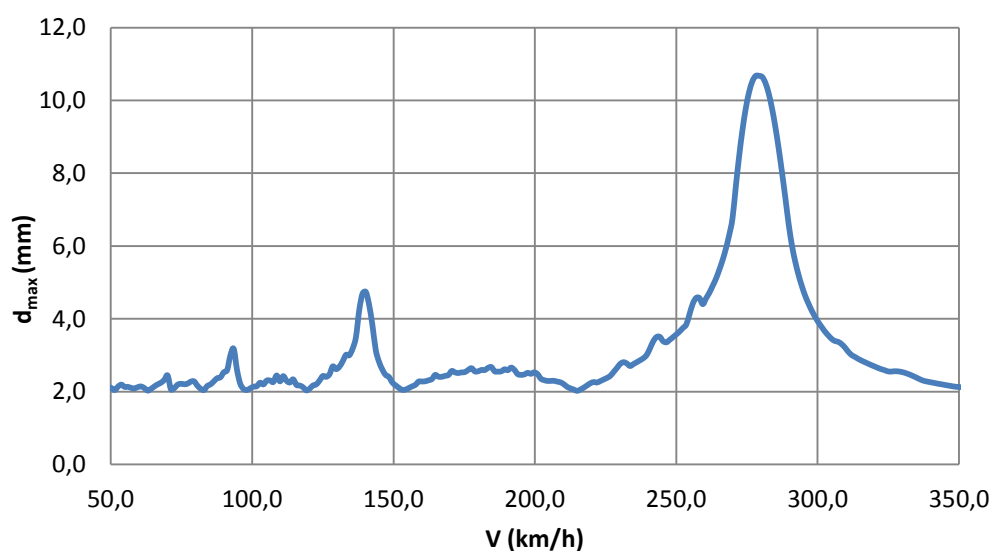


Gráfico 5.15 – Resposta ao comboio HSLM-A7 para amortecimento nulo ($\xi \approx 0$): d_{\max} .

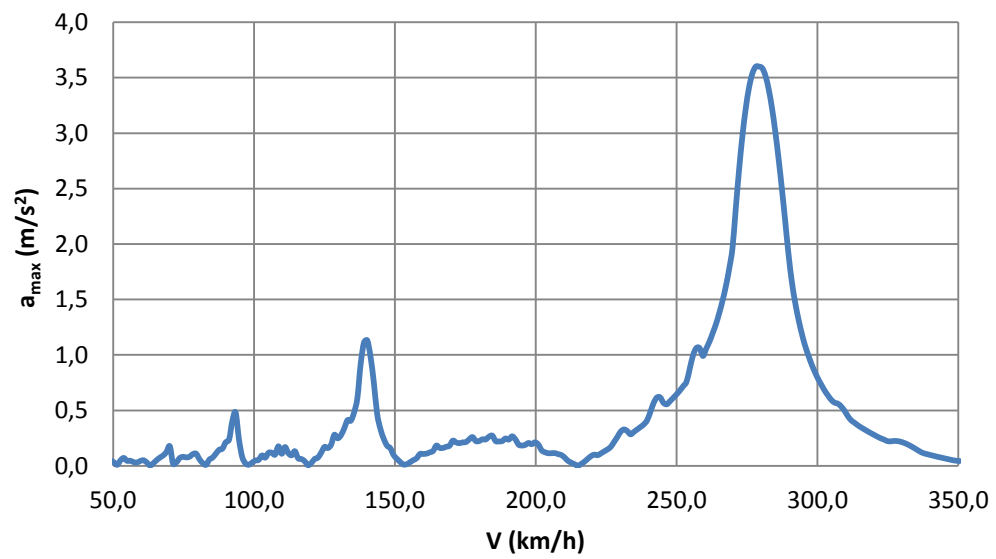


Gráfico 5.16 – Resposta ao comboio HSLM-A7 para amortecimento nulo ($\xi \approx 0$): a_{\max} .

6. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Neste capítulo apresentam-se algumas considerações finais sobre o trabalho apresentado bem como alguns possíveis desenvolvimentos futuros.

6.1. CONCLUSÕES

A elaboração da presente Dissertação permitiu adquirir alguns conhecimentos úteis relativos ao comportamento estrutural de uma ponte sujeita a tráfego ferroviário de alta velocidade. Em particular, a análise dinâmica de uma ponte ferroviária de alta velocidade deve ser realizada com especial atenção à possibilidade de ocorrência do fenómeno de ressonância, passível de ocorrer devido à periodicidade implícita na solicitação.

Após se expor a teoria subjacente, aplicou-se o Método da Decomposição da Excitação em Ressonância (DER) para analisar o comportamento dinâmico do viaduto de El Genil, em Espanha. Os parâmetros de análise foram os máximos deslocamentos e acelerações, a meio vão, para uma gama abrangente de velocidades de circulação dos comboios – onde estes incluíram comboios reais e comboios universais do modelo HSLM-A. Concluiu-se que o comboio crítico é o HSLM-A7, que causa os maiores valores da resposta dinâmica para a velocidade de ressonância de 279.2km/h.

A comparação dos resultados obtidos com os reportados em Bebiano (2010), obtidos com recurso à Teoria Generalizada de Vigas, resultou (i) muito boa em termos dos valores das velocidades de ressonância e dos andamentos gerais das curvas (d_{\max} -V e a_{\max} -V) e suas envolventes mas (ii) significativamente inferior em termos dos valores de pico da resposta. A explicação para esta discrepância pode estar relacionada com as simplificações envolvidas na formulação do método DER, em particular no facto de este apenas considerar a contribuição do modo fundamental de vibração para a resposta.

Finalmente, fizeram-se dois estudos paramétricos, para investigar o efeito (i) do espaçamento dos eixos e (ii) do amortecimento na resposta dinâmica da ponte. No primeiro caso, concluiu-se que a maior resposta se dá para um espaçamento de $D = 23m = L/2$, ou seja, metade do vão do tabuleiro. No segundo caso, verificou-se que, como bem conhecido, o pico de ressonância aumenta com a redução de ξ – o resultado para $\xi = 0$ teve de ser obtido de forma aproximada, pois essa condição não é aceitável pelas fórmulas do DER.

6.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Possíveis desenvolvimentos futuros, incidindo sobre o mesmo tabuleiro, incluem p.e.:

- (i) Análise com recurso a modelos estruturais mais sofisticados, nomeadamente elementos finitos de barra/grelha ou de casca – enquanto os primeiros permitem estimar o efeito da torção, os segundos permitem também contabilizar o efeito das eventuais deformações locais e distorcionais das paredes do tabuleiro.
- (ii) Análise considerando a interação entre o veículo e a estrutura.
- (iii) Aquisição de resultados experimentais do viaduto construído, e comparação com as estimativas teóricas baseadas em modelos estruturais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barbero, J. (2001) – Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la ressonância – Tesis doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.
- Bebiano, R. (2010) – *Stability and Dynamics of Thin-Walled Members: Application of Generalised Beam Theory* – Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico (IST/UTL).
- Clough, R.W. e Penzien, J. (1993) – *Dynamics of Structures* (2ª edição) – McGraw-Hill, New York.
- De Angoit, I. (2008) – *High speed rail: development around the world* – Proceedings of the Workshop on Noise and Vibration on High-Speed Railways, Calçada R. et al. (eds.), Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto (FEUP/UP).
- EN 1990-A2 (2005) – *Basis of Structural Design – Annex A2: Applications for Bridges (Normative)*, European Committee for Standardization (CEN).
- EN 1991-2 (2003) – *Eurocode 1 – Part 2: Traffic Loads on Bridges* – European Committee for Standardization (CEN).
- ERRI D214 (2001) – *Railway Bridges for Speeds Higher than 200km/h*, European Rail Research Institute (ERRI), Brussels.
- Figueiredo, H. (2007) – *Dinâmica de pontes mistas aço-betão em linhas de alta velocidade* – Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto (FEUP/UP).
- Frýba, L. (1999) – *Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads* (3rd edition) – Thomas Telford, London.
- Pinto, J.R. (2007) – *Dinâmica de Pontes em Viga Caixão em Linhas Ferroviárias de Alta Velocidade* – Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Univ. de Porto (FEUP/UP).
- Rigueiro, M. (2007) – *Avaliação dos Efeitos Dinâmicos em Pontes Ferroviárias de Alta Velocidade de Pequeno e Médio Vão* – Tese apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil na Especialidade de Mecânica das Estruturas e dos Materiais, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

ANEXO

ANÁLISE DINÂMICA

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSOÂNCIA

ANÁLISE DINÂMICA

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSOÂNCIA

Cálculo do fator constante C_t :

$$C_t = \left(\frac{8\pi f_0^2}{K} \right) = \frac{4}{mL\pi}$$

m (ton/m)	39,94
EI (kN/m ²)	7,63E+08
L (m)	46
ξ	0,02

M^*	918,62
K^*	381981,1

ω^0 (rad/s)	20,39
f^0 (1/s)	3,245437

C_t (kg ⁻¹ m ⁻¹)	0,031879
---	----------

Cálculo função que traduz a linha de influência $A(L/\lambda)$:

$$A\left(\frac{L}{\lambda}\right) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 - 1} \right|$$

L (m)	46
---------	----

λ (m)	L/λ	$A(L/\lambda)$
4	11,500	6,03272E-18
4,1	11,220	0,001535272
4,2	10,952	0,002065147
4,3	10,698	0,001273881
4,4	10,455	0,000326268
• • •		
29,8	1,544	0,016014428
29,9	1,538	0,014235289
30	1,533	0,012437284

Características do comboio HSLM - A7:

A7	N	13
	D (m)	24
	d (m)	2,0
	d_{67} (m)	19,2375
	N_{tot}	40
	X (m)	397,525
	P_k (kN)	190

k	x_k (m)	P_k (kN)
1	0,000	190
2	3,000	190
3	14,000	190
4	17,000	190
5	20,525	190
6	22,525	190
7	41,763	190
8	43,763	190
9	65,763	190
10	67,763	190
11	89,763	190
12	91,763	190
13	113,763	190
14	115,763	190
15	137,763	190
16	139,763	190
17	3,000	190
18	14,000	190
19	185,763	190
20	187,763	190
21	209,763	190
22	211,763	190
23	233,763	190
24	235,763	190
25	257,763	190
26	259,763	190
27	281,763	190
28	283,763	190
29	305,763	190
30	307,763	190
31	329,763	190
32	331,763	190
33	353,763	190
34	355,763	190
35	375,000	190
36	377,000	190
37	380,525	190
38	383,525	190
39	394,525	190
40	397,525	190

Cálculo do factor que traduz a excitação devida ao comboio e a resposta da ponte em ressonância, designado por espectro do comboio (G):

$$G(\lambda) = \frac{1}{\xi x_{N-1}} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \cos\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} P_k \sin\left(\frac{2\pi x_k}{\lambda}\right) \right)^2} \left(1 - e^{-2\pi \xi \frac{x_{N-1}}{\lambda}} \right) \right]$$

\downarrow \downarrow
 a_i b_i

a_i (kN)

k	1	2	3	4	5		36	37	38	39	40
λ (m)											
4	190	-3,49E-14	-190	-1,40E-13	128,9721		8,10E-12	128,9721	139,5213	-128,972	-139,521
4,1	190	-21,7899	-163,318	115,1828	189,8606		181,1453	71,02524	-183,208	29,00336	183,2082
4,2	190	-42,279	-95	181,5588	144,0146		14,19872	-152,874	-75,9795	174,1468	-112,826
4,3	190	-61,3473	-6,93918	181,9441	27,66422		-86,876	-189,873	67,87387	2,14E-12	-179,824
4,4	0	-172,83	172,8301	-143,592	-163,403		-172,83	20,31007	163,4027	-163,403	156,0699
	→						→				
29,8	190	153,2409	-186,589	-171,678	-71,3197		-110,705	22,97845	130,0347	13,0095	-101,57
29,9	190	153,4782	-186,226	-172,641	-73,861		-147,385	-27,8479	88,2974	64,56678	-53,1808
30	190	153,7132	-185,848	-173,574	-76,3701		-173,574	-76,3701	40,47577	110,8728	-0,99483

b_i (kN)

k	1	2	3	4	5		36	37	38	39	40
λ (m)											
4	0	-190	1,63E-13	190	139,5213	↓	190	139,5213	-128,972	-139,521	128,9721
4,1	0	-188,746	97,09355	151,1056	7,277519		-57,3269	-176,225	-50,3465	187,7733	-50,3465
4,2	0	-185,236	164,5448	56,00348	-123,935		-189,469	-112,826	174,1468	-75,9795	-152,874
4,3	0	-179,824	189,8732	-54,7388	-187,975		-168,975	6,939184	177,4631	-190	61,34728
4,4	0	-172,83	172,8301	-143,592	-163,403		-172,83	20,31007	163,4027	-163,403	156,0699
29,8	0	112,3264	35,83853	-81,4052	-176,107		-154,417	-188,605	-138,531	189,5541	160,5724
29,9	0	112,002	37,67883	-79,3413	-175,056		-119,907	-187,948	-168,237	178,6928	182,4056
30	0	111,6792	39,50322	-77,28	-173,976		-77,28	-173,976	-185,639	154,2959	189,9974

$$S_o(\lambda) = \sum a_i^2 + \sum b_i^2$$

k	1	2	3	4	5		36	37	38	39	40
$\lambda (m)$											
4	190	268,7006	190	1,4E-13	190		2,48E-12	190	268,7006	190	1,43E-11
4,1	190	252,8238	91,78331	133,9872	317,0376		126,7096	215,8373	165,932	35,57274	213,1981
4,2	190	236,9261	56,63606	236,9261	388,5366		231,9909	95,87059	112,51	175,4131	130,3604
4,3	190	221,1064	122,1277	306,9285	404,8542		306,9028	120,1496	227,9711	188,6707	9,56617
4,4	190	205,4435	190	345,6602	376,2183		349,1042	207,8339	190,9911	207,8339	33,79683
29,8	190	361,1531	215,6213	68,42986	139,328		165,8683	320,4837	446,483	260,1675	108,3139
29,9	190	361,2779	217,1001	72,00328	137,5905		194,4469	355,5358	482,2658	295,6783	139,6128
30	190	361,4015	218,5807	75,55348	135,9895		218,7342	386,6255	516,679	330,7435	168,0727

$G(\lambda)$

k	1	2	3	4	5	36	37	38	39	40	Envolvente
$\lambda (m)$											
4		402,7945	241,4693	1,7E-13	219,9643	3,29E-13	24,96535	35,03018	24,07949	1,8E-12	402,794522
4,1		370,1693	114,3693	160,036	360,6123	16,80483	28,36022	21,63232	4,508274	26,81555	370,169307
4,2		338,9988	69,22064	277,8213	434,3241	30,76763	12,597	14,66774	22,23076	16,39639	434,324146
4,3		309,3243	146,4561	353,4475	444,8882	40,70263	15,78712	29,72009	23,91089	1,203205	444,888206
4,4		281,156	223,6382	391,0252	406,5157	46,29931	27,30832	24,899	26,33943	4,250856	419,459799
					↓						
29,8		75,66774	44,14675	13,92309		17,51138	33,64805	46,65727	26,72592	11,07511	86,0336107
29,9		75,44233	44,30518	14,60289		20,50049	37,2777	50,32889	30,3342	14,25696	85,1003584
30		75,21815	44,46298	15,27362		23,0296	40,48258	53,84783	33,88734	17,14102	84,2030822

DESLOCAMENTOS E ACELERAÇÕES:

EI (kN/m ²)	7,63E+08
L (m)	46
ω^0	20,39
C _t	0,031879
y _{sta} (m)	0,002

y _{sta} - corresponde à resposta estática da estrutura (m)	$y_{sta} = 4 * P_k * L^3 / 48EI$
y _{tt} - corresponde às acelerações (m/s ²)	$y_{tt} = A \left(\frac{L}{\lambda} \right) G(\lambda) C_t$
y _{dyn} - corresponde aos deslocamentos (mm)	$y_{dyn} = (y_{sta} + y_{tt}/w^{0^2}) * 1000$

HSML - A7						
Envolvente G	λ	v (m/s)	v (km/h)	A(L/λ)G(λ)	y _{tt} (m/s ²)	y _{dyn} (mm)
402,7945219	4	12,98175	46,7	0,000	0,000	2,02
370,1693067	4,1	13,30629	47,9	0,568	0,018	2,06
434,3241461	4,2	13,63083	49,1	0,897	0,029	2,09
444,8882058	4,3	13,95538	50,2	0,567	0,018	2,06
419,4597987	4,4	14,27992	51,4	0,137	0,004	2,03
426,0444271	4,5	14,60446	52,6	0,783	0,025	2,08
397,9817234	4,6	14,92901	53,7	0,997	0,032	2,10
401,8843614	4,7	15,25355	54,9	0,825	0,026	2,08
370,4346698	4,8	15,5781	56,1	0,262	0,008	2,04
341,7940215	4,9	15,90264	57,2	0,336	0,011	2,04
325,674711	5	16,22718	58,4	0,781	0,025	2,08
303,0165843	5,1	16,55173	59,6	0,932	0,030	2,09
276,6146505	5,2	16,87627	60,8	0,785	0,025	2,08
249,0947476	5,3	17,20081	61,9	0,443	0,014	2,05
222,9019218	5,4	17,52536	63,1	0,045	0,001	2,02
259,9150834	5,5	17,8499	64,3	0,387	0,012	2,05
265,125666	5,6	18,17445	65,4	0,771	0,025	2,08
267,7824595	5,7	18,49899	66,6	1,007	0,032	2,10
268,8963928	5,8	18,82353	67,8	1,048	0,033	2,10
284,0391972	5,9	19,14808	68,9	0,942	0,030	2,09
347,8232743	6	19,47262	70,1	0,743	0,024	2,08
245,164574	6,1	19,79716	71,3	0,139	0,004	2,03
220,4987317	6,2	20,12171	72,4	0,252	0,008	2,04

229,0418429	6,3	20,44625	73,6	0,630	0,020	2,07
267,7809161	6,4	20,77079	74,8	1,083	0,035	2,10
303,331761	6,5	21,09534	75,9	1,478	0,047	2,13
329,6438059	6,6	21,41988	77,1	1,698	0,054	2,15
344,1475333	6,7	21,74443	78,3	1,674	0,053	2,15
355,0402405	6,8	22,06897	79,4	1,441	0,046	2,13
372,849875	6,9	22,39351	80,6	1,055	0,034	2,10
375,6991807	7	22,71806	81,8	0,487	0,016	2,06
364,0986315	7,1	23,0426	83,0	0,145	0,005	2,03
368,9525771	7,2	23,36714	84,1	0,778	0,025	2,08
355,2208783	7,3	23,69169	85,3	1,315	0,042	2,12
331,3943777	7,4	24,01623	86,5	1,679	0,054	2,15
338,06351	7,5	24,34077	87,6	2,066	0,066	2,18
324,0873799	7,6	24,66532	88,8	2,196	0,070	2,19
324,1361416	7,7	24,98986	90,0	2,279	0,073	2,19
348,2982605	7,8	25,31441	91,1	2,392	0,076	2,20
402,8602036	7,9	25,63895	92,3	2,541	0,081	2,21
499,6240191	8	25,96349	93,5	2,692	0,086	2,23
401,8577337	8,1	26,28804	94,6	1,674	0,053	2,15
326,1376365	8,2	26,61258	95,8	0,883	0,028	2,09
276,2348501	8,3	26,93712	97,0	0,299	0,010	2,04
236,1815845	8,4	27,26167	98,1	0,148	0,005	2,03
209,4697835	8,5	27,58621	99,3	0,494	0,016	2,06
182,6466538	8,6	27,91075	100,5	0,736	0,023	2,08
171,4287446	8,7	28,2353	101,6	0,958	0,031	2,09
172,9952426	8,8	28,55984	102,8	1,207	0,038	2,11
179,4276488	8,9	28,88439	104,0	1,463	0,047	2,13
187,4386422	9	29,20893	105,2	1,702	0,054	2,15
193,3888484	9,1	29,53347	106,3	1,882	0,060	2,16
194,5675011	9,2	29,85802	107,5	1,965	0,063	2,17
212,2483731	9,3	30,18256	108,7	2,160	0,069	2,18
229,8169195	9,4	30,5071	109,8	2,290	0,073	2,19
244,9273716	9,5	30,83165	111,0	2,322	0,074	2,20
262,8639464	9,6	31,15619	112,2	2,296	0,073	2,19
283,1885883	9,7	31,48074	113,3	2,196	0,070	2,19
300,1337976	9,8	31,80528	114,5	1,971	0,063	2,17
313,4073311	9,9	32,12982	115,7	1,630	0,052	2,14
322,8396713	10	32,45437	116,8	1,193	0,038	2,11
328,3677322	10,1	32,77891	118,0	0,682	0,022	2,07
330,0200313	10,2	33,10345	119,2	0,126	0,004	2,03
327,9028648	10,3	33,428	120,3	0,443	0,014	2,05
327,1706407	10,4	33,75254	121,5	1,013	0,032	2,10
332,7045276	10,5	34,07708	122,7	1,604	0,051	2,14

332,4109682	10,6	34,40163	123,8	2,159	0,069	2,18
335,7476778	10,7	34,72617	125,0	2,717	0,087	2,23
337,7628931	10,8	35,05072	126,2	3,239	0,103	2,27
337,3228118	10,9	35,37526	127,4	3,699	0,118	2,30
340,5091776	11	35,6998	128,5	4,155	0,132	2,34
338,0486605	11,1	36,02435	129,7	4,490	0,143	2,36
344,1226636	11,2	36,34889	130,9	4,886	0,156	2,39
347,5778603	11,3	36,67343	132,0	5,193	0,166	2,42
356,8786075	11,4	36,99798	133,2	5,531	0,176	2,44
367,2198727	11,5	37,32252	134,4	5,829	0,186	2,47
387,2321563	11,6	37,64706	135,5	6,219	0,198	2,50
419,6033687	11,7	37,97161	136,7	6,739	0,215	2,54
469,789843	11,8	38,29615	137,9	7,460	0,238	2,59
553,6129931	11,9	38,6207	139,0	8,592	0,274	2,68
598,348165	12	38,94524	140,2	8,969	0,286	2,71
563,1161524	12,1	39,26978	141,4	8,049	0,257	2,64
492,8966951	12,2	39,59433	142,5	6,627	0,211	2,53
442,7053544	12,3	39,91887	143,7	5,513	0,176	2,44
408,1009036	12,4	40,24341	144,9	4,622	0,147	2,37
380,8121901	12,5	40,56796	146,0	3,838	0,122	2,31
356,7922288	12,6	40,8925	147,2	3,111	0,099	2,26
341,1887315	12,7	41,21705	148,4	2,480	0,079	2,21
322,6963105	12,8	41,54159	149,5	1,849	0,059	2,16
313,5411214	12,9	41,86613	150,7	1,292	0,041	2,12
299,278464	13	42,19068	151,9	0,735	0,023	2,08
283,1039684	13,1	42,51522	153,1	0,211	0,007	2,03
279,4642563	13,2	42,83976	154,2	0,279	0,009	2,04
272,9217986	13,3	43,16431	155,4	0,755	0,024	2,08
263,6954882	13,4	43,48885	156,6	1,197	0,038	2,11
252,0380271	13,5	43,81339	157,7	1,591	0,051	2,14
248,9143107	13,6	44,13794	158,9	2,009	0,064	2,17
248,7445941	13,7	44,46248	160,1	2,439	0,078	2,21
248,4177762	13,8	44,78703	161,2	2,859	0,091	2,24
247,9415233	13,9	45,11157	162,4	3,265	0,104	2,27
247,323273	14	45,43611	163,6	3,656	0,117	2,30
246,5702331	14,1	45,76066	164,7	4,027	0,128	2,33
245,6893814	14,2	46,0852	165,9	4,378	0,140	2,35
244,6874663	14,3	46,40974	167,1	4,707	0,150	2,38
243,5710081	14,4	46,73429	168,2	5,011	0,160	2,40
242,3463013	14,5	47,05883	169,4	5,290	0,169	2,42
241,0194176	14,6	47,38337	170,6	5,542	0,177	2,44
239,5962083	14,7	47,70792	171,7	5,767	0,184	2,46
238,0823087	14,8	48,03246	172,9	5,964	0,190	2,48

236,4831421	14,9	48,35701	174,1	6,132	0,195	2,49
234,8039236	15	48,68155	175,3	6,272	0,200	2,50
233,0496652	15,1	49,00609	176,4	6,384	0,204	2,51
231,2251805	15,2	49,33064	177,6	6,467	0,206	2,51
229,3350896	15,3	49,65518	178,8	6,522	0,208	2,52
227,3838241	15,4	49,97972	179,9	6,549	0,209	2,52
225,3756325	15,5	50,30427	181,1	6,550	0,209	2,52
223,3145851	15,6	50,62881	182,3	6,525	0,208	2,52
222,4060636	15,7	50,95335	183,4	6,510	0,208	2,52
222,3815808	15,8	51,2779	184,6	6,498	0,207	2,52
222,2535313	15,9	51,60244	185,8	6,460	0,206	2,51
222,02561	16	51,92699	186,9	6,398	0,204	2,51
221,7014757	16,1	52,25153	188,1	6,310	0,201	2,50
221,2847433	16,2	52,57607	189,3	6,200	0,198	2,49
220,7789782	16,3	52,90062	190,4	6,066	0,193	2,48
220,1876907	16,4	53,22516	191,6	5,911	0,188	2,47
219,5143311	16,5	53,5497	192,8	5,735	0,183	2,46
218,7622864	16,6	53,87425	193,9	5,539	0,177	2,44
217,9348764	16,7	54,19879	195,1	5,324	0,170	2,43
217,0353514	16,8	54,52334	196,3	5,092	0,162	2,41
216,0668898	16,9	54,84788	197,5	4,844	0,154	2,39
215,0325964	17	55,17242	198,6	4,581	0,146	2,37
213,9355008	17,1	55,49697	199,8	4,304	0,137	2,35
213,337791	17,2	55,82151	201,0	4,025	0,128	2,33
213,8251364	17,3	56,14605	202,1	3,754	0,120	2,31
214,2096038	17,4	56,4706	203,3	3,466	0,111	2,28
214,4944507	17,5	56,79514	204,5	3,165	0,101	2,26
214,6829107	17,6	57,11968	205,6	2,850	0,091	2,24
214,7781874	17,7	57,44423	206,8	2,523	0,080	2,21
214,7834482	17,8	57,76877	208,0	2,186	0,070	2,19
214,7018203	17,9	58,09332	209,1	1,838	0,059	2,16
214,5363857	18	58,41786	210,3	1,483	0,047	2,13
214,2901785	18,1	58,7424	211,5	1,120	0,036	2,10
213,966181	18,2	59,06695	212,6	0,751	0,024	2,08
214,6659246	18,3	59,39149	213,8	0,379	0,012	2,05
217,1546041	18,4	59,71603	215,0	0,000	0,000	2,02
219,4495087	18,5	60,04058	216,1	0,392	0,013	2,05
221,5518582	18,6	60,36512	217,3	0,796	0,025	2,08
223,8176579	18,7	60,68966	218,5	1,212	0,039	2,11
228,1444859	18,8	61,01421	219,7	1,654	0,053	2,15
232,1967109	18,9	61,33875	220,8	2,111	0,067	2,18
235,9770983	19	61,6633	222,0	2,581	0,082	2,22
239,4890629	19,1	61,98784	223,2	3,062	0,098	2,25

242,7365815	19,2	62,31238	224,3	3,553	0,113	2,29
245,724116	19,3	62,63693	225,5	4,051	0,129	2,33
248,4565467	19,4	62,96147	226,7	4,554	0,145	2,37
250,939112	19,5	63,28601	227,8	5,060	0,161	2,41
253,1773555	19,6	63,61056	229,0	5,568	0,177	2,45
255,1770788	19,7	63,9351	230,2	6,075	0,194	2,48
256,9442991	19,8	64,25965	231,3	6,579	0,210	2,52
258,4852107	19,9	64,58419	232,5	7,080	0,226	2,56
259,8061512	20	64,90873	233,7	7,575	0,241	2,60
260,9135701	20,1	65,23328	234,8	8,063	0,257	2,64
261,8140013	20,2	65,55782	236,0	8,542	0,272	2,67
262,5140378	20,3	65,88236	237,2	9,011	0,287	2,71
265,4177895	20,4	66,20691	238,3	9,554	0,305	2,75
268,421405	20,5	66,53145	239,5	10,104	0,322	2,79
273,2689793	20,6	66,85599	240,7	10,729	0,342	2,84
278,3346574	20,7	67,18054	241,8	11,370	0,362	2,89
283,0009236	20,8	67,50508	243,0	12,001	0,383	2,94
287,2699377	20,9	67,82963	244,2	12,619	0,402	2,99
291,1451822	21	68,15417	245,4	13,223	0,422	3,03
294,6313187	21,1	68,47871	246,5	13,809	0,440	3,08
297,7340582	21,2	68,80326	247,7	14,376	0,458	3,12
300,4600429	21,3	69,1278	248,9	14,922	0,476	3,16
304,8299928	21,4	69,45234	250,0	15,548	0,496	3,21
311,5991216	21,5	69,77689	251,2	16,299	0,520	3,27
318,6864502	21,6	70,10143	252,4	17,071	0,544	3,33
325,1550077	21,7	70,42597	253,5	17,814	0,568	3,38
331,0048185	21,8	70,75052	254,7	18,525	0,591	3,44
336,238703	21,9	71,07506	255,9	19,200	0,612	3,49
343,3295986	22	71,39961	257,0	19,980	0,637	3,55
353,1991697	22,1	71,72415	258,2	20,925	0,667	3,62
362,1565489	22,2	72,04869	259,4	21,820	0,696	3,69
370,1947031	22,3	72,37324	260,5	22,660	0,722	3,76
380,7069056	22,4	72,69778	261,7	23,652	0,754	3,83
392,8413805	22,5	73,02232	262,9	24,748	0,789	3,92
403,683973	22,6	73,34687	264,0	25,765	0,821	3,99
418,1219973	22,7	73,67141	265,2	27,012	0,861	4,09
432,2448349	22,8	73,99595	266,4	28,242	0,900	4,18
449,05238	22,9	74,3205	267,6	29,649	0,945	4,29
466,07925	23	74,64504	268,7	31,072	0,991	4,40
486,4593132	23,1	74,96959	269,9	32,720	1,043	4,53
508,8167426	23,2	75,29413	271,1	34,503	1,100	4,66
533,4246711	23,3	75,61867	272,2	36,440	1,162	4,81
565,7967165	23,4	75,94322	273,4	38,909	1,240	5,00

608,9419369	23,5	76,26776	274,6	42,126	1,343	5,25
644,3880282	23,6	76,5923	275,7	44,812	1,429	5,45
670,8705016	23,7	76,91685	276,9	46,866	1,494	5,61
686,1733765	23,8	77,24139	278,1	48,121	1,534	5,71
690,3272093	23,9	77,56594	279,2	48,568	1,548	5,74
687,6742192	24	77,89048	280,4	48,505	1,546	5,74
674,7479613	24,1	78,21502	281,6	47,683	1,520	5,67
652,0585504	24,2	78,53957	282,7	46,137	1,471	5,56
620,5667271	24,3	78,86411	283,9	43,936	1,401	5,39
581,4144689	24,4	79,18865	285,1	41,163	1,312	5,17
535,8782253	24,5	79,5132	286,2	37,915	1,209	4,93
491,1486347	24,6	79,83774	287,4	34,706	1,106	4,68
456,9125002	24,7	80,16228	288,6	32,226	1,027	4,49
426,3086339	24,8	80,48683	289,8	29,991	0,956	4,32
399,0314228	24,9	80,81137	290,9	27,984	0,892	4,16
374,3545213	25	81,13592	292,1	26,155	0,834	4,02
352,0082278	25,1	81,46046	293,3	24,486	0,781	3,90
332,6494768	25,2	81,785	294,4	23,024	0,734	3,78
313,8760217	25,3	82,10955	295,6	21,602	0,689	3,67
298,2011469	25,4	82,43409	296,8	20,395	0,650	3,58
283,0740556	25,5	82,75863	297,9	19,227	0,613	3,49
268,809166	25,6	83,08318	299,1	18,121	0,578	3,41
257,1331253	25,7	83,40772	300,3	17,192	0,548	3,34
245,5083696	25,8	83,73226	301,4	16,270	0,519	3,27
233,9689878	25,9	84,05681	302,6	15,358	0,490	3,20
224,4956399	26	84,38135	303,8	14,586	0,465	3,14
216,0587616	26,1	84,7059	304,9	13,885	0,443	3,08
207,7160467	26,2	85,03044	306,1	13,194	0,421	3,03
199,4821167	26,3	85,35498	307,3	12,516	0,399	2,98
191,3704186	26,4	85,67953	308,4	11,850	0,378	2,93
184,2825137	26,5	86,00407	309,6	11,254	0,359	2,88
178,711872	26,6	86,32861	310,8	10,755	0,343	2,84
173,2315095	26,7	86,65316	312,0	10,265	0,327	2,81
167,8462772	26,8	86,9777	313,1	9,785	0,312	2,77
162,5605151	26,9	87,30225	314,3	9,316	0,297	2,73
157,3780655	27	87,62679	315,5	8,857	0,282	2,70
152,3022868	27,1	87,95133	316,6	8,410	0,268	2,66
147,3360682	27,2	88,27588	317,8	7,975	0,254	2,63
142,4818436	27,3	88,60042	319,0	7,553	0,241	2,60
138,657907	27,4	88,92496	320,1	7,190	0,229	2,57
135,5716148	27,5	89,24951	321,3	6,869	0,219	2,55
132,555031	27,6	89,57405	322,5	6,555	0,209	2,52
129,6086946	27,7	89,89859	323,6	6,248	0,199	2,50

126,7329755	27,8	90,22314	324,8	5,947	0,190	2,47
123,928078	27,9	90,54768	326,0	5,654	0,180	2,45
121,1940454	28	90,87223	327,1	5,368	0,171	2,43
118,5307643	28,1	91,19677	328,3	5,089	0,162	2,41
115,9379684	28,2	91,52131	329,5	4,817	0,154	2,39
113,4152438	28,3	91,84586	330,6	4,551	0,145	2,37
110,9620333	28,4	92,1704	331,8	4,293	0,137	2,35
108,5776416	28,5	92,49494	333,0	4,041	0,129	2,33
106,2612405	28,6	92,81949	334,2	3,797	0,121	2,31
104,0118747	28,7	93,14403	335,3	3,558	0,113	2,29
101,8284672	28,8	93,46857	336,5	3,327	0,106	2,27
99,70982591	28,9	93,79312	337,7	3,101	0,099	2,26
97,65464995	29	94,11766	338,8	2,882	0,092	2,24
95,66153638	29,1	94,44221	340,0	2,669	0,085	2,22
93,7289873	29,2	94,76675	341,2	2,462	0,078	2,21
91,8554173	29,3	95,09129	342,3	2,261	0,072	2,19
90,13908942	29,4	95,41584	343,5	2,067	0,066	2,18
89,05566921	29,5	95,74038	344,7	1,891	0,060	2,16
88,01065723	29,6	96,06492	345,8	1,717	0,055	2,15
87,0035012	29,7	96,38947	347,0	1,546	0,049	2,14
86,03361066	29,8	96,71401	348,2	1,378	0,044	2,12
85,10035843	29,9	97,03855	349,3	1,211	0,039	2,11
84,20308216	30	97,3631	350,5	1,047	0,033	2,10